УДК 512.25/26

ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С МАТРИЦАМИ УЗКОБЛОЧНОЙ СТРУКТУРЫ

Р.А.Звягина

В наиболее распространенном методе решения задач линейного программирования - методе последовательного улучшения допустимого вектора (см. [1, 2]) - на каждом шаге процесса приходится решать системы линейных уравнений порядка M, равного числу ограничений задачи. Одним из путей повышения максимальной размерности решаемых задач является создание специальных алгорифмов, реализующих общий метод с учетом специфики структуры матрицы системы ограничений выделенного класса задач. Так, например, были созданы эффективные алгорифмы для наиболее простых задач линейного программирования (транспортной и обобщенной транспортной).

Следующим шагом в повышении максимальной размерности путем учета специфики матрицы явилось выделение Г.Ш.Рубинштейном [3] класса задач линейного программирования, в которых все переменные разбиваются на p групп. На переменные каждой группы накладывается одно ограничение, и, кроме того, имеется m ограничений, связывающих переменные разных групп. Часть матрицы системы ограничений такой задачи, очевидно, имеет "узкоблочную" структуру (каждый блок содержит лишь одну строку). На основе идей, высказанных Г.Ш.Рубинштейном в [3,4], для указанного класса задач был разработан алгорифм, реализованный в виде программы [5].

В этом алгорифме учет структуры матрицы ограничений позволяет на каждом шаге метода последовательного улучшения встречающиеся системы линейных уравнений порядка $M = m + p$ сводить к системам порядка m.

§ I. Постановка задачи

Чтобы не усложнять изложение, ограничимся рассмотрением задачи линейного программирования в следующей форме: все переменные неотрицательны и все ограничения как общего, так и специального вида заданы в форме равенств. Будем считать, что множество

$$\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

номеров переменных разбито на непересекающиеся подмножества:

$$\mathcal{J}_0 = \{1, 2, \ldots, n_0\},$$
$$\mathcal{J}_1 = \{n_0+1, \ldots, n_0+n_1\},$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{J}_p = \{\sum_{k=0}^{p-1} n_k+1, \ldots, \sum_{k=0}^{p} n_k\} \quad (\sum_{k=0}^{p} n_k = n).$$

Задача I. Найти вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, минимизирующий линейную функцию

$$\sum_{k=0}^{p} \sum_{j\in\mathcal{J}_k} c_j x$$

при условиях:

$$\sum_{k=0}^{p} \sum_{j\in\mathcal{J}_k} x_j A^j = b,$$

$$\sum_{j\in\mathcal{J}_k} a_{m+k,j}\, x = b_{m+k}, \quad k = 1, \ldots, p,$$

где b и $A^j, j\in\mathcal{J}$ – столбцы размерности m, а $a_{m+k,j}\neq 0$ для $j\in\mathcal{J}_k, k=1,\ldots,p$. Матрица $\bar{A}$ системы ограничений типа равенств имеет, очевидно, узкоблочную структуру:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A^1 \ldots A^{n_0} & A^{n_0+1} \ldots A^{n_0+n_1} & \ldots & A^{n-n_p+1} \ldots A^{n} \\ & a_{m+1,n_0+1} \ldots a_{m+1,n_0+n_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{m+p,n-n_p+1} \ldots a_{m+p,n} \end{pmatrix}$$

Двойственной к задаче I является

Задача II. Найти вектор $y = (y_1, \ldots, y_m)$ и переменные $y_{m+1}, \ldots, y_{m+p}$, максимизирующие линейную функцию

$$yb + \sum_{k=1}^{p} b_{m+k}\, y_{m+k},$$

при условиях:

$$yA^j \leqslant c_j, \quad j \in \mathcal{J}_0,$$

$$yA^j + a_{m+k,j}\, y_{m+k} \leqslant c_j, \quad j \in \mathcal{J}_k, \; k=1,\dots,p$$

В дальнейшем будут приняты следующие обозначения:

$$\tilde{y} = (y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_{m+p}),$$
$$\tilde{b} = (b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_{m+k})^T,$$

$\hat{A}^j$ – j-й столбец матрицы $\tilde{A}^j$,
E^i – i-й столбец, а E_i – i-я строка единичной матрицы E порядка m.

§ 2. Конкретизация метода последовательного улучшения

Как обычно, в начале процесса последовательного улучшения допустимого вектора будем считать, что известно допустимое базисное решение $x = \{x_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, т.е. известно подмножество $J \subset \mathcal{J}$ такое, что

1) столбцы $\tilde{A}^j$, $j \in J$, образуют базис $m+p$ – мерного пространства R^{m+p},

2) в представлении

$$\tilde{b} = \sum_{j\in\mathcal{J}} x_j \tilde{A}^j = \sum_{j\in J} x_j \hat{A}^j$$

коэффициенты $x_j \geqslant 0$, $j \in J$, и $x_j = 0$, $j \in \mathcal{J} \setminus J$

Для оптимальности допустимого базисного вектора x (см. напр., [I,2]) необходимо и достаточно существование такого вектора $\hat{y}$, что

$$\tilde{y}\tilde{A}^j = c_j, \quad j \in J, \tag{I}$$
$$\tilde{y}\hat{A}^j \leqslant c_j, \quad j \in \mathcal{J}. \tag{2}$$

Множество J номеров базисных столбцов естественным образом разбивается на подмножества

$$J_k = J \cap \mathcal{J}_k, \quad k = 0, 1, \dots, p$$

При этом $J_k \neq \phi$ для $k = 1, \dots, p$. В противном случае в матрице

$$\hat{B} = \{\hat{A}^j\}_{j\in J}$$

размерности $(m+p)\times(m+p)$ имелась бы нулевая строка.

что невозможно, т.к. столбцы $\tilde{A}^j$, $j \in \mathcal{J}$, линейно независимы.

Выделим из каждого множества $\mathcal{J}_K$ по одному индексу j_{m+K}, $K=1,\ldots,p$ и назовем столбцы $\tilde{A}^{j_{m+K}}$, $K=1,\ldots,p$ **главными** в соответствующих блоках, т.е. не нарушая общности, будем считать, что в матрице $\tilde{B}$ все главные столбцы находятся в конце:

$$\tilde{B} = (\underbrace{\tilde{A}^{j_1}\,\tilde{A}^{j_2}\ldots\tilde{A}^{j_m}}_{\text{неглавные}}\quad\underbrace{\tilde{A}^{j_{m+1}}\,\tilde{A}^{j_{m+2}}\ldots\tilde{A}^{j_{m+p}}}_{\text{главные}})$$

Каждый шаг процесса последовательного улучшения допустимого вектора начинается с решения системы уравнений (I) относительно вектора $\tilde{y}$. Выпишем эту систему подробнее:

$$yA^j = c_j, \quad j \in \mathcal{J}_0,$$

$$yA^j + a_{m+K,j}\,y_{m+K} = c_j, \quad j \in \mathcal{J}_K \setminus \{j_{m+K}\},\ K=1,\ldots,p,$$

$$yA^{j_{m+K}} + a_{m+K,j_{m+K}}\,y_{m+K} = c_{j_{m+K}}, \quad K=1,\ldots,p.$$

Из последних p уравнений, отвечающих главным столбцам $\tilde{A}^{j_{m+K}}$, $K=1,\ldots,p$, выразим переменные y_{m+K}, $K=1,\ldots,p$ через y

$$y_{m+K} = \frac{1}{a_{m+K,j_{m+K}}}\left(c_{j_{m+K}} - yA^{j_{m+K}}\right) \qquad (3)$$

и подставим в оставшиеся m уравнений. Получим

$$y\bar{A}^j = \bar{c}_j, \quad j \in \mathcal{J} \setminus \{j_{m+1},\ldots,j_{m+p}\}. \qquad (4)$$

Здесь и в дальнейшем

$$\bar{A}^j = \begin{cases} A^j, & \text{если } j \in \mathcal{J}_0, \\ A^j - \dfrac{a_{m+K,j}}{a_{m+K,j_{m+K}}}A^{j_{m+K}}, & \text{если } j \in \mathcal{J}_K,\ K=1,\ldots,p; \end{cases} \qquad (5)$$

$$\bar{c}_j = \begin{cases} c_j, & \text{если } j \in \mathcal{J}_0, \\ c_j - \dfrac{a_{m+K,j}}{a_{m+K,j_{m+K}}}c_{j_{m+K}}, & \text{если } j \in \mathcal{J}_K,\ K=1,\ldots,p. \end{cases} \qquad (6)$$

Таким образом, для определения вектора y необходимо решить систему (4) порядка m, после чего переменная y_{m+K}, отвечающая K-му блоку, определяется по формуле (3) через главный столбец этого блока.

Если условия (2) признака оптимальности не выполняются для некоторого $j_\circ \in \mathcal{J} \setminus J$, то столбец $\tilde{A}^{j_\circ}$ следует ввести в базис.

Для этого столбец

$$\tilde{A}^{j_\circ} = \begin{pmatrix} A^{j_\circ} \\ a_{m+1,j_\circ} \\ \vdots \\ a_{m+p,j_\circ} \end{pmatrix},$$

где компоненты $a_{m+k,j_\circ}$, $k=1,\dots,p$ за исключением разве лишь одной, равны нулю, разлагаем по базису

$$\sum_{j\in J} g_j \tilde{A}^j = \hat{A}^{j_\circ}.$$

Или подробнее:

$$\sum_{j\in J_\circ} g_j A^j + \sum_{k=1}^{p} \sum_{j\in J_k} g_j A^j = A^{j_\circ},$$

$$\sum_{j\in J_k} a_{m+k,j}\, g_j = a_{m+k,j_\circ}, \quad k=1,\dots,p.$$

Из последних p уравнений выразим переменные $g_{j_{m+k}}$ $(k=1,\dots,p)$, отвечающие главным столбцам, через остальные

$$g_{j_{m+k}} = \frac{1}{a_{m+k,j_{m+k}}}\Big(a_{m+k,j_\circ} - \sum_{j\in J_k\setminus\{j_{m+k}\}} a_{m+k,j}\, g_j\Big), \qquad (7)$$

и подставим в первые m уравнений:

$$\sum_{j\in J_\circ} g_j A^j + \sum_{k=1}^{p} \sum_{j\in J_k\setminus\{j_{m+k}\}} g_j A^j +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{a_{m+k,j_{m+k}}}\Big(a_{m+k,j_\circ} - \sum_{j\in J_k\setminus\{j_{m+k}\}} a_{m+k,j}\, g_j\Big) A^{j_{m+k}} = A^{j_\circ}.$$

В силу обозначений (5) имеем:

$$\sum_{j\in J_\circ} g_j \bar{A}^j + \sum_{k=1}^{p} \sum_{j\in J_k\setminus\{j_{m+k}\}} g_j \bar{A}^j = \bar{A}^{j_\circ},$$

или

$$\sum_{\ell=1}^{m} g_{j_\ell} \bar{A}^{j_\ell} = \bar{A}^{j_\circ}, \qquad (8)$$

т.е. имеем систему порядка m относительно переменных $g_{j_1}, \dots, g_{j_m}$, отвечающих неглавным столбцам. Остальные переменные $g_{j_{m+1}}, \dots, g_{j_{m+p}}$ определяются по формулам (7).

Заметим, что матрицы систем (4) и (8) транспонированы одна относительно другой.

В качестве номера j_ν исключаемого из базиса столбца выбирается один из индексов, на котором достигается

$$\min_{j \in J,\, g_j > 0} \frac{x_j}{g_j} = \frac{x_{j_\nu}}{g_{j_\nu}} ,$$

где ν – порядковый номер столбца $\tilde{A}^{j_\nu}$ в матрице $\tilde{B}$. (Если $g_j \le 0$, $j \in J$, то $\inf\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) = -\infty$ при условиях задачи I)

Покажем, что при переходе от базиса $\hat{A}^j$, $j \in J$, к базису $\hat{A}^j$, $j \in (J \setminus \{j_\nu\}) \cup \{j_0\}$, преобразование матрицы

$$B = (\bar{A}^{j_1}\ \bar{A}^{j_2} \dots \bar{A}^{j_m})$$

систем (4) и (8) сводится к добавлению к матрице B матрицы $u v^T$, где u и v – столбцы размерности m.

Рассмотрим возможные случаи значений ν и j_0:

а) $1 \le \nu \le m$. Столбец $\tilde{A}^{j_\nu}$ не является главным. Тогда в системах (4) и (8) столбец $\bar{A}^{j_\nu}$ заменяется столбцом $\bar{A}^{j_0}$. Это равносильно следующему преобразованию матрицы B:

$$B' = B + (\bar{A}^{j_0} - \bar{A}^{j_\nu}) E_\nu . \qquad (9)$$

б) $m < \nu \le m + p$. Столбец $\tilde{A}^{j_\nu}$ – главный в q-м блоке ($q = \nu - m$), но и $\tilde{A}^{j_0}$ – столбец из этого же блока. Это значит, что в системах (4) и (8) столбцы

$$\bar{A}^j = A^j - \frac{a_{\nu j}}{a_{\nu j_\nu}} A^{j_\nu}, \quad j \in J_q \setminus \{j_\nu\},$$

следует заменять столбцами

$$\bar{A}'^j = A^j - \frac{a_{\nu j}}{a_{\nu j_0}} A^{j_0}, \quad j \in J_q \setminus \{j_\nu\} .$$

(При этом $\tilde{A}^{j_0}$ становится главным в q-м блоке).

Так как

$$\bar{A}'^j = A^j - \frac{a_{\nu j}}{a_{\nu j_\nu}} A^{j_\nu} + \frac{a_{\nu j}}{a_{\nu j_\nu}} A^{j_\nu} - \frac{a_{\nu j}}{a_{\nu j_0}} A^{j_0} =$$

$$= \bar{A}^j - \frac{a_{\nu j}}{a_{\nu j_0}}\left(A^{j_0} - \frac{a_{\nu j_0}}{a_{\nu j_\nu}} A^{j_\nu}\right) = \bar{A}^j - \frac{a_{\nu j}}{a_{\nu j_0}} \bar{A}^{j_0},$$

то эта замена сводится к тому, что к столбцам q -го блока в системах (4) и (8) добавляется один и тот же столбец $\bar{A}^{j_0}$ с коэффициентами $-a_{\nu j}/a_{\nu j_0}$, $j \in J_q \setminus \{j_\nu\}$. Будем считать, что столбец $\bar{A}^{j_0}$ добавляется и к остальным столбцам матрицы с коэффициентом 0. Тогда

$$B' = B + \bar{A}^{j_0} v^T, \tag{10}$$

где компоненты v_ℓ, $\ell = 1, \ldots, m$ столбца v определяются по формуле:

$$v_\ell = \begin{cases} 0, & \text{если } j_\ell \notin J_q \setminus \{j_\nu\}, \\ -\dfrac{a_{\nu j_\ell}}{a_{\nu j_0}}, & \text{если } j_\ell \in J_q \setminus \{j_\nu\}. \end{cases} \tag{11}$$

в) $m < \nu \leq m + p$. Столбец $\tilde{A}^{j_\nu}$ – главный в q -м блоке $(q = \nu - m)$, но $\tilde{A}^{j_0}$ – столбец из другого блока и поэтому он не может стать главным в q -м блоке.

Тогда $\tilde{A}^{j_\nu}$ и один из н е г л а в н ы х базисных столбцов q -го блока нужно поменять ролями. Заметим, что в этом случае множество $J_q \setminus \{j_\nu\} \neq \phi$, так как

$$g_{j_\nu} = -\frac{1}{a_{\nu j_\nu}} \sum_{j \in J_q \setminus \{j_\nu\}} a_{\nu j}\, g_j > 0.$$

Пусть в q -м блоке главным стал столбец $\tilde{A}^{j_\mu}$, $j_\mu \in J_q \setminus \{j_\nu\}$ $(1 \leq \mu \leq m)$, а столбец $\tilde{A}^{j_\nu}$ встал на его место. Это значит, что в системах (4) и (8) к столбцам $\bar{A}^j$, $j \in J_q \setminus \{j_\nu, j_\mu\}$, добавляется (как и в п."б") один и тот же столбец $\bar{A}^{j_\mu}$ с коэффициентами $-a_{\nu j}/a_{\nu j_\mu}$, а столбец

$$\bar{A}^{j_\mu} = A^{j_\mu} - \frac{a_{\nu j_\mu}}{a_{\nu j_\nu}} A^{j_\nu}$$

заменяется на

$$\bar{A}'^{j_\mu} = A^{j_\nu} - \frac{a_{\nu j_\nu}}{a_{\nu j_\mu}} A^{j_\mu} = -\frac{a_{\nu j_\nu}}{a_{\nu j_\mu}} \bar{A}^{j_\mu} = \bar{A}^{j_\mu} - \left(1 + \frac{a_{\nu j_\nu}}{a_{\nu j_\mu}}\right) \bar{A}^{j_\mu},$$

т.е. к столбцу $\bar{A}^{j_\mu}$ добавляется тот же столбец $\bar{A}^{j_\mu}$ с коэффициентом $-(1 + a_{\nu j_\nu}/a_{\nu j_\mu})$. Будем считать, что столбец $\bar{A}^{j_\mu}$

добавляется и к остальным столбцам матрицы B с коэффициентом 0. Тогда

$$B' = B + \bar{A}^{j_\mu} v^T, \tag{12}$$

где компоненты v_ℓ, $\ell = 1, \ldots, m$, столбца v определяются по формуле:

$$v_\ell = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad j_\ell \notin J_q \setminus \{j_\nu\}, \\ -\dfrac{a_{\nu j_\ell}}{a_{\nu j_\mu}}, & \text{если} \quad j_\ell \in J_q \setminus \{j_\nu, j_\mu\}, \\ -\left(1 + \dfrac{a_{\nu j_\nu}}{a_{\nu j_\mu}}\right), & \text{если} \quad \ell = \mu . \end{cases} \tag{13}$$

Так как величина $a_{\nu j_\mu}$ – в знаменателе, то для повышения точности вычислений естественно выбирать j_μ из условий

$$|a_{\nu j_\mu}| = \max_{j \in J_q \setminus \{j_\nu\}} |a_{\nu j}| .$$

Заметим, что если $a_{m+\kappa, j} = \pm 1$, $j \in J_\kappa$, $\kappa = 1, \ldots, p$, то в качестве j_μ можно взять любой индекс из множества $J_q \setminus \{j_\nu\}$.

Таким образом, столбцы $\tilde{A}^{j_\nu}$ и $\tilde{A}^{j_\mu}$ в матрице $\tilde{B}$ поменялись местами, а так как $1 \le \mu \le m$, то в системах (4) и (8) столбец $\bar{A}'^{\mu}$ заменяется столбцом $\bar{A}^{j_0}$ так же, как в случае "а":

$$B'' = B' + (\bar{A}^{j_0} - \bar{A}'^{j_\mu}) E_\mu , \tag{14}$$

где B' получена из B по формуле (12).

§ 3. Особенности использования аппарата обратных матриц

Для решения систем (4) и (8) достаточно обратить матрицу B порядка m. Тогда

$$y = \bar{c} B^{-1},$$
$$\bar{g} = B^{-1} \bar{A}^{j_0},$$

где $\bar{c} = (\bar{c}_{j_1}, \bar{c}_{j_2}, \ldots, \bar{c}_{j_m})$, $\bar{g} = (g_{j_1}, g_{j_2}, \ldots, g_{j_m})^T$.

Из § 2 следует, что матрица B' отличается от матрицы B предыдущего шага на матрицу $u v^T$. Напомним, что если

$$B' = B + uv^T,$$

то

$$(B')^{-1} = B^{-1} - \frac{1}{\gamma} B^{-1} u v^T B^{-1}, \qquad (15)$$

где $\gamma = v^T B^{-1} u + 1$ (см., например, [7], стр.192).

Так как в случае " а "

$$u = \bar{A}^{j_0} - \bar{A}^{j_\nu}, \quad v = E^\nu,$$

то в силу (9), (15) и того, что

$$B^{-1}(\bar{A}^{j_0} - \bar{A}^{j_\nu}) = \bar{g} - E^\nu,$$

обратная матрица B^{-1} подправляется по формуле

$$(B')^{-1} = B^{-1} - \frac{1}{g_{j_\nu}} (\bar{g} - E^\nu) E_\nu B^{-1}. \qquad (16)$$

Аналогично, в случае "б" имеем

$$(B')^{-1} = B^{-1} - \frac{a_{\nu j_0}}{a_{\nu j_\nu} \cdot g_{j_\nu}} \bar{g} v^T B^{-1}, \qquad (17)$$

где компоненты v_ℓ, $\ell = 1, \ldots, m$ столбца v определяются по формуле (11).

В случае "в" к матрице B сначала применяется преобразование (12), а затем к матрице B' - преобразование (14).

Так как

$$B^{-1} \bar{A}^{j_\mu} = E^\mu,$$

то из (12) и (15) следует, что

$$(B')^{-1} = B^{-1} + \frac{a_{\nu j_\mu}}{a_{\nu j_\nu}} E^\mu v^T B^{-1}, \qquad (18)$$

где компоненты v_ℓ, $\ell = 1, \ldots, m$ столбца v определяются по формулам (13). Вектор $\bar{g}$ подправляется по формуле:

$$\bar{g}' = (B')^{-1} \bar{A}^{j_0} = \bar{g} + (g_{j_\nu} - g_{j_\mu}) E^\mu,$$

т.е. в векторе $\bar{g}$ μ -я компонента заменяется на g_{j_ν}. Отсюда и из (14) и (15) следует, что

$$(B'')^{-1} = (B')^{-1} - \frac{1}{g'_{j_\mu}} (\bar{g}' - E^\mu) E_\mu (B')^{-1}, \qquad (19)$$

где

$$g'_{j_\mu} = g_{j_\nu}.$$

§ 4. Вычислительный алгорифм с использованием аппарата обратных матриц

Будем считать, что в исходной матрице $\tilde{A}$ компоненты

$$a_{m+k,j} = \pm 1 \quad \text{для} \quad j \in \mathcal{J}_k,\ k = 1, \ldots, p.$$

В противном случае столбец A^j и число c_j заменяются на $(1/|a_{m+k,j}|)A^j$ и $c_j/|a_{m+k,j}|$ соответственно.

Описание массивов

Исходные данные задачи I, за исключением столбца b и параметра m, разбиваются по блокам на $p+1$ подмассивов:

$$0)\ n_0, \tilde{A}^1, \tilde{A}^2, \ldots, \tilde{A}^{n_0};\ c_1, c_2, \ldots, c_{n_0};$$

$$1)\ n_1, b_{m+1}, \tilde{A}^{n_0+1}, \tilde{A}^{n_0+2}, \ldots, \tilde{A}^{n_0+n_1}, c_{n_0+1}, \ldots, c_{n_0+n_1};$$

$$\vdots$$

$$p)\ n_p, b_{m+p}, \tilde{A}^{n-n_p+1}, \ldots, \tilde{A}^{n}, c_{n-n_p+1}, \ldots, c_n.$$

В качестве промежуточной информации хранятся следующие массивы:

1) Шкала

$$H = (H_1, H_2, \ldots, H_p),$$

в каждой строке H_k которой записана информация о блоке (начало и конец k-го массива в памяти и вид памяти). Кроме того, для $k > 0$ в строке H_k хранится информация о главном столбце $\tilde{A}^{j_{m+k}}$ (номер j_{m+k} и число $\lambda_k = \operatorname{sign} a_{m+k, j_{m+k}}$, причем для изображения последнего достаточно одного разряда).

2) Матрица B^{-1}, размерности $m \times m$, обратная к базисной матрице

$$B = (\bar{A}^{j_1}\ \bar{A}^{j_2} \ldots \bar{A}^{j_m}).$$

3) $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$.

4) $\bar{c} = (\bar{c}_{j_1}, \bar{c}_{j_2}, \ldots, \bar{c}_{j_m})$ (см. § 3).

5) $\bar{x} = (x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m})$ – коэффициенты разложения вектора $\tilde{b}$ по базису, отвечающие неглавным базисным столбцам.

6) $\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{x}}_0, \bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_m)$ – коэффициенты разложения вектора $\tilde{b}$ по базису, отвечающие главным базисным

столбцам тех блоков, для которых

$$J_\kappa \setminus \{j_{m+\kappa}\} \neq \varnothing, \quad \kappa = 1, \ldots, p,$$

и блока, в котором нарушено условие (2) критерия оптимальности. Так как множество

$$\bigcup_{\kappa=1}^{p} (J_\kappa \setminus \{j_{m+\kappa}\})$$

номеров неглавных базисных столбцов содержит m элементов, то непустых множеств $J_\kappa \setminus \{j_{m+\kappa}\}$ может быть не более m, откуда следует, что длина массива $\bar{\bar{x}}$ (равно как и массива $\bar{\bar{g}}$, который будет описан ниже) не превосходит $m+1$.

7) $\bar{g} = (g_{j_1}, g_{j_2}, \ldots, g_{j_m})$ (см. §3).

8) $\bar{\bar{g}} = (\bar{\bar{g}}_0, \bar{\bar{g}}_1, \ldots, \bar{\bar{g}}_m)$ – коэффициенты разложения вводимого столбца, отвечающие тем же базисным столбцам, что и компоненты вектора $\bar{\bar{x}}$.

9) Шкала

$$h = (h_0, h_1, \ldots, h_m),$$

в каждой строке h_ℓ которой для $\ell \geq 1$ записана информация как о базисном столбце $\tilde{A}^{j_\ell}$, так и о κ_ℓ-м блоке, которому этот столбец принадлежит, а именно:

j_ℓ – номер столбца,

$$\bar{\lambda}_\ell = \begin{cases} 0, & \text{если } \kappa_\ell = 0, \\ \operatorname{sign} a_{m+\kappa_\ell, j_\ell}, & \text{если } \kappa_\ell > 0, \end{cases}$$

κ_ℓ – номер блока,

$$\lambda_{\kappa_\ell} = \begin{cases} 0, & \text{если } \kappa_\ell = 0, \\ \operatorname{sign} a_{m+\kappa_\ell, j_{m+\kappa_\ell}}, & \text{если } \kappa_\ell > 0. \end{cases}$$

φ_ℓ – признак, принимающий для $\kappa_\ell > 0$ ненулевое значение в том и только в том случае, если в массиве $\bar{\bar{x}}$ компонента $\bar{\bar{x}}_\ell = x_{j_{m+\kappa_\ell}}$, а в массиве $\bar{\bar{g}}$ компонента $\bar{\bar{g}}_\ell = g_{j_{m+\kappa_\ell}}$, при этом если $\varphi_{\ell'} \neq 0$, то во всех остальных строках h_ℓ с номерами $\kappa_\ell = \kappa_{\ell'}$ должно быть $\varphi_\ell = 0$. Если $\kappa_\ell = 0$, то $\varphi_\ell = 0$.

В строке h_0 записывается аналогичная информация о вводимом столбце $\tilde{A}^{j_0}$ и о блоке, которому он принадлежит.

Шкале h для удобства записи формул поставим в соответствие множества

$$\mathcal{J}_\ell = \{i \,/\, 1 \leq i \leq m \ \text{ и } \ \kappa_i = \kappa_\ell\}, \quad \ell = 0, 1, \ldots, m.$$

Очевидно, что для тех ℓ и ℓ', для которых $\kappa_\ell = \kappa_{\ell'}$, множества $\mathfrak{I}_\ell$ и $\mathfrak{I}_{\ell'}$ совпадают.

Описание алгорифма

1) Вычисление $y = \bar{c}B^{-1}$.

2) По строке H_κ $(0 \leq \kappa \leq p)$ шкалы H вызывается κ-й массив исходных данных в оперативную память (либо определяются его границы, если вся информация в оперативной памяти).

Если $\kappa = 0$, то переходим к п. 3.

Если $\kappa > 0$, то по строке H_κ отыскивается главный столбец $\tilde{A}^{j_{m+\kappa}}$, число $c_{j_{m+\kappa}}$ и вычисляется $y_{m+\kappa}$ по формуле (3).

3) Если условие (2) критерия оптимальности выполнено для всех $j \in \mathfrak{I}_\kappa$, то переходим к п. 6.

Если $\tilde{y}\tilde{A}^{j_0} > c_{j_0}$ для $j_0 \in \mathfrak{I}_\kappa$, то составляем информационную строку h_0 для столбца $\tilde{A}^{j_0}$, полагая $\kappa_0 = \kappa$ и

$$\varphi_0 \begin{cases} \neq 0, & \text{если } \kappa > 0, \\ = 0, & \text{если } \kappa = 0. \end{cases}$$

Вычисляем столбец $\bar{A}^{j_0}$ и $\bar{c}_{j_0}$ по формулам (5) и (6) соответственно, кроме того, полагаем:

$$x_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } \kappa = 0, \\ \lambda_\kappa b_{m+\kappa}, & \text{если } \kappa > 0, \end{cases}$$

$$g_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } \kappa = 0, \\ \lambda_\kappa \cdot \operatorname{sign} a_{m+\kappa, j_0}, & \text{если } \kappa > 0. \end{cases}$$

В шкале h для $\ell = 1, \ldots, m$ полагаем

$$\varphi'_\ell = \begin{cases} 0, & \text{если } \kappa_\ell = \kappa, \\ \varphi_\ell, & \text{если } \kappa_\ell \neq \kappa. \end{cases}$$

4) Вычисление вектора $\bar{g} = B^{-1}\bar{A}^{j_0}$, коэффициентов $\bar{\bar{g}}_\ell$, $\ell = 0, \ldots, m$ и $\bar{\bar{x}}_0$:

$$\bar{\bar{g}}_\ell = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi_\ell = 0, \\ g_{j_{m+\kappa_\ell}} = -\lambda_{\kappa_\ell} \cdot \sum\limits_{i \in \mathfrak{I}_\ell} \bar{\lambda}_i g_{ji}, & \text{если } \varphi_\ell \neq 0 \text{ и } \ell \geq 1, \\ g_{j_{m+\kappa_0}} = g_0 - \lambda_{\kappa_0} \cdot \sum\limits_{i \in \mathfrak{I}_0} \bar{\lambda}_i g_{ji}, & \text{если } \ell = 0, \end{cases}$$

$$\bar{\bar{x}}_0 = x_{j_{m+\kappa_0}} = x_0 - \lambda_{\kappa_0} \sum_{i \in \mathfrak{I}_0} \bar{\lambda}_i x_{ji}.$$

Если все $g_{j_\ell} \le 0$ и все $\bar{\bar{g}}_\ell \le 0$, то переходим к п.7.

5) Вычисление

$$\theta = \min\left\{ \min_{\substack{\ell=1,\dots,m \\ g_{j_\ell}>0}} \frac{x_{j_\ell}}{g_{j_\ell}},\ \min_{\substack{\ell=0,\dots,m \\ \bar{\bar{g}}_\ell>0}} \frac{\bar{\bar{x}}_\ell}{\bar{\bar{g}}_\ell} \right\}.$$

5а) Если $\theta = \frac{x_{j_\nu}}{g_{j_\nu}}$ $(1 \le \nu \le m)$, то матрицу B^{-1} подправляем по формуле (I6), векторы $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ – по формулам

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= \bar{x} - \theta \bar{g}, \\ \bar{\bar{x}}' &= \bar{\bar{x}} - \theta \bar{\bar{g}}. \end{aligned} \tag{20}$$

При этом если $\varphi_\nu \ne 0$, $K_\nu \ne K$ и множество $\mathcal{J}_\nu \setminus \{\nu\} \ne \phi$, т.е. в шкале h есть еще хотя бы одна строка $h_{\nu'}$ с $K_{\nu'} = K_\nu$, то полагаем $\varphi_{\nu'} \ne 0$, $\bar{\bar{x}}'_{\nu'} = \bar{\bar{x}}'_\nu$ (в противном случае оставляем φ_ℓ, $\ell = 1,2,\dots,m$, без изменения).

Строку h_0, числа c_{j_0}, θ и $\bar{\bar{x}}'$ вносим вместо h_ν, $\bar{c}_{j_\nu}$, $\bar{x}'_{j_\nu}$ и $\bar{\bar{x}}'_\nu$ в массивы h, $\bar{c}$, $\bar{x}'$, $\bar{\bar{x}}'$ соответственно и переходим к п. I.

5б) Если $\theta = \frac{\bar{\bar{x}}_0}{\bar{\bar{g}}_0}$, то в строке H_K всю информацию о главном столбце $\tilde{A}^{j_{m+K}}$ заменяем на соответствующую информацию о столбце $\tilde{A}^{j_0}$, который теперь стал главным в K-м блоке. Матрицу B^{-1} подправляем по формуле (I7), векторы $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ – по формулам (20), вектор $\bar{c}$ – по формуле

$$\bar{c}' = \bar{c} + \bar{c}_{j_0} v^T,$$

где вектор v определяется по формуле (II), в шкале h для $\ell = 1,\dots,m$ полагаем

$$\lambda'_{K_\ell} = \begin{cases} \lambda_{K_\ell}, & \text{если } \ell \notin \mathcal{J}_0, \\ \operatorname{sign} a_{m+K, j_0}, & \text{если } \ell \in \mathcal{J}_0. \end{cases}$$

Если $\varphi_0 \ne 0$ и $\mathcal{J}_0 \ne \phi$, т.е. в шкале h имеется хотя бы одна строка h_ν с $K_\nu = K_0$, то полагаем $\varphi_\nu \ne 0$, $\bar{\bar{x}}'_\nu = \bar{\bar{x}}'$ (В противном случае оставляем φ_ℓ; $\ell = 1,\dots,m$, без изменения) и переходим к п.I.

5в) Если $\theta = \frac{\bar{\bar{x}}_\mu}{\bar{\bar{g}}_\mu}$ $(1 \le \mu \le m$, отсюда следует, что $\varphi_\mu \ne 0$ и $K_\mu \ne K)$, то в строке H_{K_μ} всю информацию о главном столбце $\tilde{A}^{j_{m+K_\mu}}$ заменяем на соответствующую информацию о столбце $\tilde{A}^{j_\mu}$, которая имеется в строке h_μ. Матрицу B^{-1} подправляем по формуле (I8), в векторах $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ компоненты

x_{j_μ} и $\bar{\bar{x}}_\mu$ меняем местами, аналогично в векторах $\bar{g}$ и $\bar{\bar{g}}$ компоненты g_{j_μ} и $\bar{\bar{g}}_\mu$ меняем местами, вектор $\bar{c}$ подправляем по формуле

$$\bar{c}' = \bar{c} - \bar{c}_{j_\mu} v^T,$$

где вектор v из формулы (I2), в шкале h для $\ell=1,\dots,m$ полагаем

$$\lambda'_{k_\ell} = \begin{cases} \lambda_{k_\ell}, & \text{если} \quad \ell \notin \mathcal{J}_\mu, \\ \lambda_{k_\mu}, & \text{если} \quad \ell \in \mathcal{J}_\mu \end{cases}$$

Если $\varphi_\mu \neq 0$ и $\mathcal{J}_\mu \setminus \{\mu\} \neq \phi$, т.е. в шкале h имеется еще хотя бы одна строка $h_{\mu'}$ с $k_{\mu'} = k_\mu$, то полагаем $\varphi_\mu = 0$, $\varphi_{\mu'} \neq 0$, $\bar{\bar{x}}'_{\mu'} = \bar{\bar{x}}'_\mu$ (в противном случае оставляем φ_ℓ, $\ell=1,\dots,m$, без изменения).

Так как преобразования (I6) и (I9) совпадают с точностью до обозначений, то, полагая $\nu=\mu$, переходим к п. 5а.

6) Если $k<p$, то заменяем k на $k+1$ и переходим к п.2.

Если $k=p$, вычисляем двойственные переменные y_{m+k}, $k=1,\dots,p$, по формулам (3), переменные $x_{j_{m+k}}$, отвечающие главным столбцам тех блоков, для которых $J_k \setminus \{j_{m+k}\} = \phi$, по формулам

$$x_{j_{m+k}} = (\operatorname{sign} a_{m+k,\, j_{m+k}}) \cdot b_{m+k}$$

и выводим векторы x и $\tilde{y}$. При этом если вместо столбца $\tilde{A}^j$ рассматривался столбец $(1/|a_{m+k,j}|)\tilde{A}^j$ для $k>0$, то вместо x_j следует выводить

$$x'_j = \frac{1}{|a_{m+k,j}|} x_j.$$

Это следует из того, что

$$x'_j \tilde{A}^j = |a_{m+k,j}| x'_j \left(\frac{1}{|a_{m+k,j}|} \tilde{A}^j \right),$$

откуда $x_j = |a_{m+k,j}| \cdot x'_j$.

7) Значение функции $\mu(x) = \sum_{k=0}^{p} \sum_{j \in \mathcal{J}_k} c_j x_j$ не ограничено снизу на множестве допустимых решений. В этом случае можно вывести допустимый вектор x (как в п. 6) и направляющий вектор $\tilde{x}$ допустимого луча $\Lambda(\tilde{x})$, исходящего из точки x, на котором $\mu(x)$ неограниченно убывает:

$$\Lambda(\tilde{x}) = \{ x + \theta \tilde{x} \mid \theta \geq 0 \},$$

где компоненты вектора $\tilde{x}$ вычисляются по формуле

$$\tilde{x}_j = \begin{cases} -g_{j_\ell} & \text{для } j = j_\ell,\ \ell = 1, \dots, m, \\ -\bar{\bar{g}}_\ell & \text{для } j = j_{m+\kappa_\ell},\ \ell = 0, \dots, m, \\ 1 & \text{для } j = j_\bullet, \\ 0 & \text{для } j \in \mathcal{J} \setminus (J \cup \{j_\bullet\}) . \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.В.Канторович, Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, М, 1959.
2. Дж.Данциг, Линейное программирование, его обобщения и применения, М, 1966.
3. Г.Ш.Рубинштейн, Обобщение задачи о крайней точке пересечения оси с выпуклым многогранником, ДАН СССР, т.113, № 5, 1957, стр. 987-990.
4. Г.Ш.Рубинштейн, О решении задач линейного программирования большого объема, сб."Оптимальное планирование", Новосибирск, вып.2, 1964.
5. Р.А.Звягина, Программа реализации на М-20 модифицированного симплекс-метода с узкоблочной матрицей, сб."Оптимальное планирование", Новосибирск, вып.4, 1966.
6. Д.К.Фаддеев, В.Н.Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, М., 1960.

Поступила в редакцию
5.I. 1970 г.