УДК 512.25/26

МЕТОД ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

В.А.Булавский

Предлагаемая статья представляет собою расширенное изложение ранее опубликованных результатов автора [I] с некоторыми дополнениями и приложением к методам решения задач линейного программирования. В первом параграфе излагаются приемы пересчета коэффициентов ортогонализации столбцов некоторой неособенной квадратной матрицы при добавлении к последней матрицы ранга один. Отдельно рассмотрен частный случай, когда в матрице заменяется один столбец. Здесь же рассматривается вопрос о росте ошибки при совершении цепочки шагов указанного вида и приводится модификация, повышающая устойчивость счета. Во втором параграфе излагается применение описанных приемов к решению задач линейного программирования по схеме последовательного улучшения допустимого вектора. В случае, когда матрица системы ограничений является редкой, может оказаться целесообразным вместо полной обратной к матрице, составленной из базисных столбцов, хранить базисные столбцы и треугольную таблицу их коэффициентов ортогонализации. В третьем параграфе рассматриваются специальные задачи линейного программирования с дополнительными ограничениями общего вида.

Все изложение ведется применительно к прямому методу решения. Перенос всех результатов на случай использования двойственного метода достаточно очевиден и отдельно не рассматривается. По этой же причине не затронут вопрос о начале счета и об учете ограничений сверху на отдельные переменные. И то и другое делается обычным для линейного программирования способом.

§ I. Пересчет коэффициентов ортогонализации

1^0. Пусть для неособенной матрицы A порядка m известны коэффициенты ортогонализации её столбцов, то есть известна такая верхняя треугольная матрица B, что матрица

$$P = AB \qquad (1)$$

является ортогональной. Требуется найти коэффициенты ортогонализации столбцов матрицы $A + uv$, где u и v - соответственно столбец и строка длины m. При этом предполагается, что известны лишь матрицы A и B (матрица P не получена) и что число арифметических действий для нахождения искомых коэффициентов ортогонализации должно быть порядка m^2, то есть на порядок меньше числа действий, которое требуется для полного процесса ортогонализации. Мы предположим также, что матрица $A + uv$ в свою очередь неособенная.

Обозначим через C искомую треугольную матрицу коэффициентов ортогонализации. Тогда

$$(A + uv)C = Q, \qquad (2)$$

где Q - снова ортогональная матрица. Поскольку $A = PB^{-1}$, то

$$Q = (A + uv)C = (PB^{-1} + uv)C = P(B^{-1} + P^{-1}uv)C.$$

Выразив отсюда матрицу C, получим

$$C = (B^{-1} + P^{-1}uv)^{-1}P^{-1}Q.$$

Применив формулу общего метода пополнения для обращения матрицы (см., например, [2]), получим

$$C = (B - \frac{1}{\sigma}BP^{-1}uvB)P^{-1}Q,$$

где $\sigma = 1 + vBP^{-1}u$. Напомним, что равенство σ нулю свидетельствует об особенности матрицы $B^{-1} + P^{-1}uv$ и, следовательно, об особенности матрицы $A + uv$. Таким образом, задача сводится к нахождению такой ортогональной матрицы $P^{-1}Q$, умножение на которую справа преобразовывало бы матрицу $(B - \frac{1}{\sigma}BP^{-1}uvB)$ в верхнюю треугольную. Заметим, что хотя такая ортогональная матрица находится и не вполне однозначно, для наших целей годится любая ортогональная матрица, обладающая указанным выше свойством.

Обозначим для краткости

$$BP^{-1}u = w, \qquad vB = z. \qquad (3)$$

Поскольку матрица B нам известна, то нахождение строки z не вызывает затруднений. Для нахождения же столбца w заметим, что $P^{-1}=P'=B'A'$, и потому

$$w=BB'A'u\,,\quad \sigma=1+vw\,. \tag{4}$$

Здесь и в дальнейшем штрих у матрицы, столбца или строки обозначает транспонирование. В сделанных обозначениях получим:

$$C=(B-\tfrac{1}{\sigma}wz)P^{-1}Q\,.$$

Матрицу $P^{-1}Q$ будем искать в виде произведения двух ортогональных матриц. Сначала определим такую ортогональную матрицу T, что матрица $\bar{C}=(B-\frac{1}{\sigma}wz)T$ имеет лишь одну отличную от нуля диагональ ниже главной. Затем определим также ортогональную матрицу S, для которой $C=\bar{C}S$. Как матрицу T, так и матрицу S будем искать в виде произведения элементарных матриц вращения

$$R(k;c;s)=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & s & \cdots \\ & & -s & c & \cdots \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ k-1 \\ k \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

при $c^2+s^2=1$.

Пусть первый отличный от нуля элемент строки z (очевидно, также, как и строки v) имеет номер p. Если $p=m$, то матрица $B-\frac{1}{\sigma}wz$ уже верхняя треугольная, и ее можно взять в качестве C. Если же $p<m$, то матрица $\bar{C}$ может быть найдена следующим образом. Обозначим через z_i, $i=1,2,\ldots,m$, элементы строки z (так что $z_1=z_2=\cdots z_{p-1}=0$) и определим числа a_i по формулам:

$$a_p=z_p\,,\quad a_i=\sqrt{a_{i-1}^2+z_i^2}\,,\quad i=p+1,p+2,\ldots,m\,.$$

Зададим теперь при $k=p+1,p+2,\ldots,m$ элементарные матрицы вращения T_k формулой:

$$T_k=R\left(k;\frac{z_k}{a_k},\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)$$

Поскольку $a_p=z_p$, $a_{p+1}=\sqrt{z_p^2+z_{p+1}^2}$, то

$$z T_{p+1} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{p \text{ раз}}, a_{p+1}, z_{p+2}, z_{p+3}, \ldots, z_n)$$

При следующем умножении на матрицу вращения получим:

$$z T_{p+1} T_{p+2} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{p+1 \text{ раз}}, a_{p+2}, z_{p+3}, \ldots, z_m).$$

Продолжив эти преобразования, найдем, что

$$\bar{z} = z T_{p+1} T_{p+2} \cdots T_m = (0, 0, \ldots, 0, a_m).$$

Поэтому у матрицы $\omega \bar{z}$ отличен от нуля только последний столбец, равный $a_m \omega$. Нетрудно убедиться в том, что матрица $B T_{p+1} T_{p+2} \cdots T_m$ отличается от верхней треугольной лишь элементами, стоящими непосредственно под главной диагональю в строках с номерами $p+1, p+2, \ldots, m$. Обозначим эти элементы, соответственно, через $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \ldots, \alpha_m$. Вспомнив, как эти элементы были получены, найдем:

$$\alpha_k = -\frac{a_{k-1}}{a_k} \beta_{kk}, \quad k = p+1, p+2, \ldots, m, \qquad (5)$$

где β_{kk} – k-й диагональный элемент матрицы B. Теперь видно, что в качестве матрицы $\bar{C}$ можно взять матрицу

$$(B - \frac{1}{6} \omega z) T_{p+1} T_{p+2} \cdots T_m,$$

или, что то же, матрицу, которая получится из $B T_{p+1} T_{p+2} \ldots T_m$, если из ее последнего столбца вычесть столбец

$$\frac{a_m}{6} \omega.$$

Для перехода от матрицы $\bar{C}$ к матрице C мы теперь можем последовательно построить матрицы

$$C_0 = \bar{C}, C_1, \ldots, C_{m-p} = C$$

по формулам

$$C_{k+1} = C_k S_{m-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-p-1,$$

где элементарные матрицы вращения S_i, $i = m, m-1, \ldots, p+1$, последовательно определяются равенствами:

$$S_i = R\left(i-1;\ \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}},\ \frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}\right).$$

Здесь числа α_i определены равенствами (5), а каждое β_i является i-м диагональным элементом матрицы C_{m-i}.

2^0. В тех случаях, когда в прямой матрице меняется лишь один столбец (как это имеет место, например, при решении задач линейного программирования) и когда, следовательно, строка v имеет лишь одну отличную от нуля компоненту, может оказаться целесообразным при переходе от матрицы A к новой матрице допускать перестановку ее столбцов. Предположим, что в матрице A нужно заменить p-й столбец. В качестве столбца u мы при этом возьмем разность между новым и старым столбцами, а в качестве v – строку с единицей на p-м месте и с нулями на остальных местах. Если коэффициенты разложения нового столбца по столбцам матрицы A обозначить через $g_1, g_2, \dots, g_m$, то, поскольку $BB'A'=A^{-1}$, из (4) получим

$$\omega_k = g_k \text{ при } k \neq p,\ \omega_p = g_p - 1,\ \sigma = g_p.$$

Здесь $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ – компоненты столбца ω. Заметим, что строка z в данном случае совпадает с p-й строкой матрицы B. Поэтому у матрицы $BT_{p+1}T_{p+2}\cdots T_m$ строка с номером p совпадет со строкой $\bar{z} = (0, 0, \dots, 0, a_m)$. Следовательно, в матрице

$$\bar{C} = B\,T_{p+1}T_{p+2}\cdots T_m - \frac{1}{g_p}\,\omega\bar{z}$$

p-я строка будет иметь отличной от нуля лишь последнюю компоненту, равную a_m/g_p. Это позволяет получить треугольную матрицу C из матрицы $\bar{C}$ перестановкой p-й строки на последнее место. Такая перестановка соответствует перестановке p-го столбца в матрице $A+uv$ также на последнее место. Таким образом, новый столбец не становится на место вычеркнутого старого, а приписывается в качестве последнего столбца новой матрицы.

3^0. Использование изложенных выше приемов в задачах линейного программирования показало, что многократное последовательное применение описанных шагов может приводить к быстрому росту накопленной ошибки*). Это можно объяснить, видимо, тем, что за счет ошибок округления матрица AB оказывается не точно орто-

---

*) Эти эксперименты были проведены Н.В.Шмыревой. Ею же предложено использовать метод итераций для повышения устойчивости счета.

гональной. Поэтому формулы (3) и (4) дают разное значение столбца w. В то же время, поскольку мы используем матрицу BB', то уже имеющаяся погрешность в матрице B от шага к шагу быстро растет.

Чтобы устранить рост наследственной ошибки, будем предполагать, что матрица P в представлении (I) не является ортогональной, а лишь близка к ней. Именно, предположим, что собственные числа матрицы $P'P$ лежат в интервале (0,2). Для определения столбца w мы теперь должны пользоваться формулой (3). Для этого столбец $\varphi = P^{-1}u$ определим методом итераций, взяв за начальное приближение столбец $\varphi^{(0)} = P'u = B'A'u$. Последовательные приближения можно получить по формуле:

$$\varphi^{(\kappa+1)} = \varphi^{(\kappa)} + B'A'(u - AB\varphi^{(\kappa)}).$$

Заметим, что если матрица $P'P$ не слишком отклонилась от единичной, то на каждом шаге потребуется одно, в крайнем случае, два уточнения. Найдя столбец φ, нужно положить $\omega = B\varphi$.

В заключение отметим, что при решении задач линейного программирования столбец ω может быть вычислен по коэффициентам разложения нового столбца по столбцам матрицы A. Поскольку $BP^{-1} = A^{-1}$, то эти коэффициенты разложения ищутся так же, как мы искали столбец w, только вместо u нужно взять разлагаемый столбец. Заметим также, что, как обычно, невязку $u - AB\varphi^{(\kappa)}$ желательно считать с повышенной точностью.

§ 2. Метод последовательного улучшения допустимого вектора

Здесь мы рассмотрим применение метода ортогонализации столбцов к решению общей задачи линейного программирования. Речь пойдет о задаче в следующей постановке. Заданы столбцы $A_j \in R^m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, столбец $a \in R^m$ и вещественные числа c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Нужно найти такие неотрицательные числа x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, что $\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = a$ и достигает максимума величина $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$. При решении поставленной задачи методом последовательного улучшения допустимого вектора ([3], [4]) к началу очередного шага предполагается выделенным множество $\mathfrak{J} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, обладающее свойствами:

а) семейство $\{A_j\}_{j \in \mathfrak{J}}$ является базисом R^m;

б) коэффициенты разложения x_j, $j \in \mathcal{J}$, по этому базису столбца a неотрицательны.
Нам удобно будет считать множество $\mathcal{J}$ каким-нибудь способом упорядоченным: $\mathcal{J} = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$.

Один шаг метода состоит в следующем. В первую очередь, определяют строку y из системы:

$$y A_j = c_j \,, \quad j \in \mathcal{J} \,. \tag{6}$$

Затем находят номер j', для которого $y A_{j'} < c_{j'}$ (если такого номера нет, то коэффициенты x_j, упомянутые в условии б) дают решение задачи). Определив числа g_K, $K = 1, 2, \ldots, m$, из равенства

$$\sum_{K=1}^{m} g_K A_{j_K} = A_{j'} \,, \tag{7}$$

находят номер p, для которого $g_p > 0$ и

$$\min_{g_K > 0} \left\{ \frac{x_{j_K}}{g_K} \right\} = \frac{x_{j_p}}{g_p}$$

Отсутствие такого номера свидетельствует о неразрешимости задачи линейного программирования. После этого вместо $\mathcal{J}$ рассматривают новое множество $(\mathcal{J} \setminus \{j_p\}) \cup \{j'\}$.

В известной схеме модифицированного симплекс-метода для нахождения решения систем (6) и (7) хранится матрица, обратная к матрице со столбцами A_j, $j \in \mathcal{J}$. При переходе к следующему шагу, когда заменяется один из столбцов прямой матрицы, обратная матрица пересчитывается на основе формул метода пополнения. Здесь мы рассмотрим применение приема, описанного в пунктах 2^0 и 3^0 предыдущего параграфа.

Обозначим через A матрицу со столбцами A_{j_K}, $K = 1, 2, \ldots, m$, через c – строку $(c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_m})$, а через g – столбец с компонентами $g_1, g_2, \ldots, g_m$. В этих обозначениях системы (6) и (7), соответственно, примут вид:

$$y A = c \,, \tag{8}$$

$$A g = A_{j'} \,. \tag{9}$$

Пусть нам известна треугольная матрица B, при которой матрица AB ортогональная (или почти ортогональная). Решение системы (8) тогда можно найти по формуле:

$$y = c B B' A' \,. \tag{10}$$

Поскольку ошибка, допущенная при нахождении строки y, не влияет на рост ошибки в матрице B, то в большинстве случаев, видимо, уточнять найденное решение нет необходимости. Если же по каким-либо соображениям это желательно, то уточнение можно провести по формуле:

$$y^{(s+1)} = y^{(s)} + (c - y^{(s)}A)BB'A'. \qquad (11)$$

Что касается системы (9), то, как отмечалось раньше, ее решение g нужно найти с возможно большей точностью. Для этого в качестве начального приближения следует взять столбец

$$g^{(0)} = BB'A'A_{j'}, \qquad (12)$$

а уточнение проводить по формулам метода последовательных приближений:

$$g^{(s+1)} = g^{(s)} + BB'A'(A_{j'} - Ag^{(s)}). \qquad (13)$$

Заметим, что матрица $BB'A'A$ подобна матрице $P'P = B'A'AB$.

После того, как найден номер p выбывающего столбца, пересчет матрицы B при введении нового столбца осуществляется согласно п.2^0 предыдущего параграфа.

В заключение сделаем несколько замечаний. Хотя вспомогательной информации описанная схема требует почти в два раза меньше, чем для хранения матрицы A^{-1}, тем не менее на каждом шаге существенно используется сама матрица A. При реализации описанной схемы счета на ЭВМ можно либо хранить матрицу A в оперативной памяти, либо каждый раз выбирать ее из более медленных видов памяти. Второй путь связан с увеличением затрат машинного времени, первый же – с занятием части оперативной памяти. Следует, однако, учитывать, что во многих задачах линейного программирования, особенно в задачах большого объема, процент ненулевых элементов в столбцах A_j весьма мал, и при экономном хранении исходной информации может оказаться более выгодным хранить в оперативной памяти матрицу A и треугольную таблицу B, чем полную обратную матрицу. Кроме того, при решении задач большого объема, видимо, и при пользовании обратной матрицей может наблюдаться потеря точности при большом числе шагов, так что оперативное использование столбцов A_j, $j \in J$, все равно может оказаться необходимым. Отметим также, что в некоторых случаях матрица A может получаться алгорифмически по более компактной информации.

§ 3. Задачи с дополнительными ограничениями

Когда речь идет о задачах с дополнительными ограничениями, имеются обычно в виду задачи следующего типа. Для $j=1,2,\dots,n$ заданы столбцы $D_j \in R^N$ и $F_j \in R^m$, а также вещественные числа c_j. Задача состоит в нахождении неотрицательных значений неизвестных x_j, которые минимизируют величину $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j D_j = d ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j F_j = f .$$

Правые части d и f в этих равенствах принадлежат соответственно пространствам R^N и R^m. Специфика рассматриваемых задач состоит в том, что для всякого базиса пространства R^N $\{D_j\}_{j\in\mathcal{K}}$, составленного из столбцов D_j, системы вида

$$\eta D_j = c_j , \quad j \in \mathcal{K} , \tag{14}$$

$$\sum_{j\in\mathcal{K}} \gamma_j D_j = h \tag{15}$$

при любых правых частях могут быть решены каким-нибудь упрощенным способом, учитывающим вид столбцов D_j. При этом обычно предполагается, что число m (число "дополнительных" ограничений) существенно меньше числа N (числа "основных" ограничений). К такого рода задачам относятся транспортная задача с дополнительными ограничениями, двухкомпонентная задача с дополнительными ограничениями и задачи блочного типа. Общеизвестный прием (см., например, [5]) учета дополнительных ограничений состоит в следующем. Пусть, как и в предыдущем параграфе, выделено множество $\mathcal{J}$, при котором семейство $\{(D_j, F_j)\}_{j\in\mathcal{J}}$ образует базис пространства $R^N \times R^m$ и такое, что решение системы

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} x_j (D_j . F_j) = (d , f)$$

неотрицательно. В множестве $\mathcal{J}$ выделим такое подмножество $\mathcal{K}$, что семейство $\{D_\nu\}_{\nu\in\mathcal{K}}$ является базисом пространства R^N.

Пусть множество $\mathcal{J}$ упорядочено таким образом, что $\mathcal{J}\setminus\mathcal{K} = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$, а $\mathcal{K}=\{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_{m+N}\}$. Составим матрицы:

$$F=[F_{j_1}\ F_{j_2} \cdots F_{j_m}],\quad \Phi=[F_{j_{m+1}} F_{j_{m+2}} \cdots F_{j_{m+N}}],$$

$$\Delta=[D_{j_1} D_{j_2} \cdots D_{j_m}],\quad D=[D_{j_{m+1}} D_{j_{m+2}} \cdots D_{j_{m+N}}].$$

Тогда система, аналогичная системе (6), относительно (η, y) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \eta D + y\Phi = \bar{\bar{c}} \\ \eta\Delta + yF = \bar{c} \end{cases}, \qquad (16)$$

где $\bar{c}=(c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_m})$, $\bar{\bar{c}}=(c_{j_{m+1}}, c_{j_{m+2}}, \ldots, c_{j_{m+N}})$. Для ее решения из второй части системы можно исключить η и найти y из равенства:

$$y(F-\Phi D^{-1}\Delta)=\bar{c}-\bar{\bar{c}}D^{-1}\Delta. \qquad (17)$$

После этого можно решить систему

$$\eta D=\bar{\bar{c}}-y\Phi \qquad (18)$$

относительно η. Когда найден номер j', для которого $\eta D_{j'}+yF_{j'} < c_{j'}$, нужно решить систему:

$$\sum_{K=1}^{m+N} g_K (D_{j_K}, F_{j_K}) = (D_{j'}, F_{j'}).$$

В сделанных обозначениях эта система примет вид:

$$\begin{cases} D\gamma + \Delta g = D_{j'}, \\ \Phi\gamma + Fg = F_{j'} \end{cases} \qquad (19)$$

Здесь g –столбец с компонентами $g_1, g_2, \ldots, g_m$, а γ –столбец с компонентами $g_{m+1}, g_{m+2}, \ldots, g_{m+N}$. Исключив из второй части системы столбец γ, столбец g найдем из равенства:

$$(F-\Phi D^{-1}\Delta)g = F_{j'}-\Phi D^{-1}D_{j'}. \qquad (20)$$

Теперь столбец γ может быть найден из системы:

$$D\gamma = D_{j'} - \Delta g. \qquad (21)$$

Введем обозначения:

$$A=F-\Phi D^{-1}\Delta,\quad A_{j'}=F_{j'}-\Phi D^{-1}D_{j'},\quad c=\bar{c}-\bar{\bar{c}}D^{-1}\Delta.$$

Тогда системы (17) и (20) соответственно примут вид (8) и (9), то есть $yA=c$ и $Ag=A_{j'}$. Как и в предыдущем параграфе, предположим, что нам известна треугольная матрица B, при которой матрица AB почти ортогональная.

Решение системы (17) и теперь может быть найдено по формуле (10), однако следует учесть, что в явном виде ни матрицы A, ни строки c у нас теперь нет. Поэтому при пользовании формулой (10) нужно попутно решить одну систему вида (14) и одну систему вида (15). Именно, при нахождении строки $\bar{c} D^{-1} = \psi$ придется решить систему $\psi D = \bar{c}$, а после того, как найдена строка c, для получения $y = (cBB')F' - (cBB')\Delta'(D^{-1})'\Phi'$ строку $(cBB')\Delta'(D^{-1})' = \chi$ нужно найти из системы $D\chi' = \Delta(cBB')'$. Если найденное значение y требует уточнения, то каждое применение формулы (11) также связано с решением пары систем вида (14) – (15), поскольку в этой формуле имеется умножение на матрицы A и A'. После того, как найдена строка y, нужно еще решить систему (18) вида (14).

Перейдем теперь к решению системы (20). При вычислении ее правой части $A_{j'}$ для нахождения столбца $D^{-1} D_{j'}$ нужно решить систему вида (15). После этого начальное приближение к решению может быть найдено по формуле (12), а уточнения следует проводить согласно (13). Как и выше, каждое умножение слева на матрицу A' связано с решением системы вида (14), а умножение на матрицу A – с решением системы вида (15). Необходимые подробные формулы расписываются без труда. После того как столбец g найден с достаточной точностью, столбец γ получается решением системы (21) вида (15).

Отметим, что в случае, когда строка y не уточняется, а столбец g уточняется однократно, для решения систем (16) и (19) в общей сложности нужно решить четыре системы вида (14) и четыре системы вида (15). Хотя общее число решаемых систем может показаться большим, однако оно не зависит от размерности m. Кроме того, в ряде случаев (например, при решении транспортной и двухкомпонентной задач с дополнительными ограничениями) число действий, требуемое для решения каждой системы вида (14) или (15), имеет порядок N. В случае же, когда решается так называемая узкоблочная задача, матрица D – диагональная.

Пусть теперь найдено p, при котором номер j_p заменяется на j'. В связи с этой заменой нужно пересчитать таблицу B, изменить множество $\mathcal{J}$ и, возможно, множество $\mathcal{K}$. При этом могут представиться различные случаи.

В том случае, когда $j_p \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{K}$ (то есть $p \leqslant m$), на следующем шаге множество $\mathcal{K}$ можно оставить без изменения. При этом матрицы D и Φ также не изменятся, а вместо матриц Δ и F появятся соответственно матрицы:

$$\tilde{\Delta} = \Delta + (D_{j'} - D_{j_p})e_p ,$$

$$\tilde{F} = F + (F_{j'} - F_{j_p})e_p .$$

Здесь e_p - строка длины m, у которой p-я компонента равна единице, а остальные - нулю. Тем самым вместо матрицы A на следующем шаге будет фигурировать матрица

$$\tilde{A} = A + (A_{j'} - A_{j_p})e_p ,$$

где $A_{j_p} = F_{j_p} - \Phi D^{-1} D_{j_p}$, то есть p-й столбец матрицы A. Таким образом, дело сводится к замене в матрице A p-го столбца на столбец $A_{j'}$, причем коэффициенты разложения столбца $A_{j'}$ по столбцам матрицы A нам известны - это решение q системы (20). Остается преобразовать таблицу B согласно п.2[0] первого параграфа. Напомним, что при этом номер j' ставится не на p-е место, а на m-е. Номера же $j_{p+1}, j_{p+2}, \ldots, j_m$ сдвигаются на одну позицию вперед.

Если выбывающий номер j_{p_1} принадлежит множеству $\mathcal{K}$ (то есть $p > m$), то следует проявить осторожность, так как при непосредственной замене $\tilde{\mathcal{K}} = (\mathcal{K} \setminus \{j_p\}) \cup \{j'\}$ новое семейство $\{D_\nu\}_{\nu \in \tilde{\mathcal{K}}}$ может оказаться либо линейно зависимым, либо близким к такому. Поэтому мы предварительно вычислим строку $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \bar{e}_p D^{-1}\Delta$, где $\bar{e}_p$ - строка длины N, у которой $(p-m)$-я компонента равна единице, а остальные - нулю. Заметим, что для вычисления строки $\bar{e}_p D^{-1}$ придется решить систему вида (14). Строка λ представляет из себя набор коэффициентов при столбце D_{j_p} в разложениях столбцов $D_{j_1}, D_{j_2}, \ldots, D_{j_m}$ по базису $\{D_\nu\}_{\nu \in \mathcal{K}}$. Обозначим для единообразия аналогичный коэффициент в разложении столбца $D_{j'}$ через λ_0. Число λ_0 нами было получено при вычислении правой части $A_{j'}$ в (20), но его легко получить и заново: $\lambda_0 = (\bar{e}_p D^{-1}) D_{j'}$. Если окажется $|\lambda_0| \geq |\lambda_K|$, $K = 1, 2, \ldots, m$, то номер j' мы включим в множество $\mathcal{K}$ вместо номера j_p. Если же

$$\max_{1 \le K \le m} \{|\lambda_K|\} = |\lambda_s| > |\lambda_0| ,$$

то вместо j_p в множество $\mathcal{K}$ включим номер j_s, а номер j' включим в множество $\mathcal{J} \setminus \mathcal{K}$ вместо номера j_s. В этом случае мы предварительно поменяем местами номера j_p и j_s, пересчитав соответственно таблицу B, а затем произведем замену номера j_p на номер j', как это уже было сделано раньше: теперь номер j_p уже не принадлежит новому множеству $\tilde{\mathcal{K}} = (\mathcal{K} \setminus \{j_p\}) \cup \cup \{j_s\}$ заменившему множество $\mathcal{K}$. Заметим, что коэффициенты g_k заново вычислять при этом не нужно - следует лишь поменять местами коэффициенты g_p и g_s.

Рассмотрим сначала случай, когда номер j' включается в множество $\mathcal{K}$ вместо номера j_p. При этом не меняются матрицы Δ и F, а вместо матриц D и Φ возникают матрицы:

$$\tilde{D} = D + (D_{j'} - D_{j_p})\bar{e}_p,$$

$$\tilde{\Phi} = \Phi + (F_{j'} - F_{j_p})\bar{e}_p.$$

Чтобы найти новую матрицу $\tilde{\Lambda}$ заметим, что

$$(\Phi D^{-1} + \frac{1}{\lambda_0} A_{j'}\bar{e}_p D^{-1})\tilde{D} = (\Phi + \frac{1}{\lambda_0} A_{j'}\bar{e}_p)(E + D^{-1}D_{j'}\bar{e}_p - D^{-1}D_{j_p}\bar{e}_p) =$$

$$= \Phi + \Phi D^{-1}D_{j'}\bar{e}_p - \Phi D^{-1}D_{j_p}\bar{e}_p + \frac{1}{\lambda_0} A_{j'}\bar{e}_p + A_{j'}\bar{e}_p - \frac{1}{\lambda_0} A_{j'}\bar{e}_p =$$

$$= \Phi + \Phi D^{-1}D_{j'}\bar{e}_p - F_{j_p}\bar{e}_p + (F_{j'} - \Phi D^{-1}D_{j'})\bar{e}_p = \tilde{\Phi}.$$

Поэтому

$$F - \tilde{\Phi}\tilde{D}^{-1}\Delta = F - (\Phi D^{-1} + \frac{1}{\lambda_0} A_{j'}\bar{e}_p D^{-1})\Delta = A - \frac{1}{\lambda_0} A_{j'}\lambda.$$

Окончательно получаем:

$$\tilde{A} = A - \frac{1}{\lambda_0} A_{j'}\lambda.$$

Таким образом, пересчет таблицы B можно осуществить согласно п.1° первого параграфа. В качестве столбца ω нужно взять столбец g (решение системы (20)), а в качестве строки v - строку $(-\frac{1}{\lambda_0}\lambda)$. Заметим также, что в силу (19)

$$\sigma = 1 + v\omega = 1 - \frac{1}{\lambda_0}\lambda g = 1 - \frac{1}{\lambda_0}\bar{e}_p D^{-1}\Delta g =$$

$$= 1 - \frac{1}{\lambda_0}\bar{e}_p(D^{-1}D_{j'} - \gamma) = 1 - \frac{1}{\lambda_0}(\lambda_0 - g_p) = \frac{g_p}{\lambda_0}.$$

Нам осталось описать пересчет таблицы B в случае, когда номера j_p и j_s ($s \leq m$, $p > m$) меняются местами. В этом случае

$$\tilde{F} = F + (\Phi\bar{e}'_p - Fe'_s)e_s, \quad \tilde{\Phi} = \Phi + (Fe'_s - \Phi\bar{e}'_p)\bar{e}_p,$$

$$\tilde{\Delta} = \Delta + (D\bar{e}'_p - \Delta e'_s)e_s, \quad \tilde{D} = D + (\Delta e'_s - D\bar{e}'_p)\bar{e}_p.$$

Прежде всего заметим, что

$$(\Phi D^{-1} + \frac{1}{\lambda_s} A e_s' \bar{e}_p D^{-1})\tilde{D} = (\Phi + \frac{1}{\lambda_s} A e_s' \bar{e}_p)(E + D^{-1}\Delta e_s' \bar{e}_p - \bar{e}_p' \bar{e}_p) =$$

$$= \Phi + \Phi D^{-1}\Delta e_s' \bar{e}_p - \Phi \bar{e}_p' \bar{e}_p + \frac{1}{\lambda_s} A e_s' \bar{e}_p + A e_s' \bar{e}_p - \frac{1}{\lambda_s} A e_s' \bar{e}_p =$$

$$= \Phi - \Phi \bar{e}_p' \bar{e}_p + F e_s' \bar{e}_p = \tilde{\Phi} .$$

Поэтому

$$\tilde{F} - \tilde{\Phi}\tilde{D}^{-1}\tilde{\Delta} = F + \Phi \bar{e}_p' e_s - F e_s' e_s -$$

$$-(\Phi D^{-1} + \frac{1}{\lambda_s} A e_s' \bar{e}_p D^{-1})(\Delta + D \bar{e}_p' e_s - \Delta e_s' e_s) =$$

$$= F + \Phi \bar{e}_p' e_s - F e_s' e_s - \Phi D^{-1}\Delta - \Phi \bar{e}_p' e_s + \Phi D^{-1}\Delta e_s' e_s -$$

$$- \frac{1}{\lambda_s} A e_s' \lambda - \frac{1}{\lambda_s} A e_s' e_s + A e_s' e_s = A - \frac{1}{\lambda_s} A e_s' (\lambda + e_s) .$$

Окончательно получим:

$$\tilde{A} = A - \frac{1}{\lambda_s} A e_s' (\lambda + e_s) .$$

Для преобразования таблицы B можно и в этом случае воспользоваться п.1° первого параграфа, если принять

$$u = A e_s' , \quad v = -\frac{1}{\lambda_s}(\lambda + e_s) .$$

При этом формулы (3) и (4) соответственно дадут:

$$\omega = e_s' , \quad \sigma = -\frac{1}{\lambda_s} .$$

Однако, учитывая вид столбца ω , можно более экономно преобразовать матрицу $B - \frac{1}{\sigma}\omega z$ к треугольному виду. Действительно, в данном случае эта матрица отличается от матрицы B лишь тем, что s -я строка в последней заменена на строку $(-\lambda B)$. Если эту строку перенести на первое место, то полученную матрицу можно принять за матрицу $\bar{C}$. При этом только нужно номер j_p поместить на первое место, а номера $j_1, j_2, \ldots, j_{s-1}$ сдвинуть на одну позицию назад. Матрица $\bar{C}$ отличается от верхней треугольной лишь элементами, стоящими непосредственно под главной диагональю в строках с номерами $2, 3, \ldots, s$. Эти элементы α_k, $k = 2, 3, \ldots, s$ получаются по формуле :

$$\alpha_{k+1} = \beta_{kk} , \quad k = 1, 2, \ldots, s-1 , \qquad (22)$$

где через β_{KK} обозначен K-й диагональный элемент матрицы B. Перейти к матрице C теперь можно подобно тому, как это было сделано в первом параграфе. Для этого построим матрицы

$$C_0 = \bar{C},\ C_1, \ldots, C_{s-1} = C$$

по формулам

$$C_{K+1} = C_K S_{s-K}, \quad K = 0, 1, \ldots, s-2,$$

где элементарные матрицы вращения S_i, $i = s, s-1, \ldots, 2$ последовательно определяются равенствами :

$$S_i = R\left(i-1;\ \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}}, \frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}}\right).$$

Здесь числа α_i определены равенствами (22), а β_i является i-м диагональным элементом матрицы C_{s-i}.

ЛИТЕРАТУРА

I. В.А.Булавский, О разложении квадратных матриц в произведение ортогональной и треугольной, Сибирский математич. журнал, т.X, № 2 (1969), 472-474.

2. Д.К.Фаддеев, В.Н.Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, М., 1960.

3. Л.В.Канторович, Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. Изд. АН СССР, М., 1959.

4. Д.Б.Юдин, Е.Г.Гольштейн, Линейное программирование.Физматгиз, М., 1959.

5. Р.А.Звягина, Задачи линейного программирования с блочно - диагональными матрицами, Оптимальное планирование, вып. 2, Новосибирск, 1964, 50-61.

Поступила в редакцию
5.I. 1970