УДК 512.25/26+513.88

О РАЗДЕЛЕНИИ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Г.Ш.Рубинштейн

В статье устанавливаются необходимые и достаточные условия существования аддитивных и однородных функционалов, разделяющих заданное конечное семейство выпуклых многогранников.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть в вещественном векторном пространстве E заданы $z \geq 2$ непустых множеств $M_1, M_2, \ldots, M_z$. Следуя Дубовицкому и Милютину [1] будем говорить, что аддитивные и однородные функционалы $f_1, f_2, \ldots, f_z$, среди которых имеются нетривиальные, разделяют заданные множества, если выполнены условия:

$$\sum_{i=1}^{z} f_i = \mathbf{0}, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{z} s(f_i, M_i) \leq 0, \tag{2}$$

где под $s(f, M)$ понимается супремум функционала f на M.

Из приведенного определения ясно, что если функционалы $f_1, f_2, \ldots, f_z$ разделяют множества $M_1, M_2, \ldots, M_z$, имеющие непустое пересечение Q, то

$$\sum_{i=1}^{z} s(f_i, M_i) = 0 \tag{3}$$

и при этом

$$H(f_j, M_j) = H(-f_j, \bigcap_{i \neq j} M_i) \supset Q, \quad j = 1, 2, \ldots, z, \tag{4}$$

где под $H(f, M)$ понимается $\{x \in E : f(x) = s(f, M)\}$.

В частности, это означает, что для разделяющих функционалов может иметь место строгое неравенство

$$\sum_{i=1}^{z} s(f_i, M_i) < 0 \tag{5}$$

лишь в случае, когда

$$\bigcap_{i=1}^{r} M_i \quad \varphi. \tag{6}$$

Ниже будет показано, что для выпуклых многогранников справедливо также обратное утверждение.

Т е о р е м а 1. Если $M_1, M_2, \ldots, M_r$ – непустые выпуклые многогранники, то для существования разделяющих функционалов $f_1, f_2, \ldots, f_r$ таких, что имеет место неравенство (5), приведенное выше очевидное необходимое условие (6) является также достаточным.

Прежде чем сформулировать результат для случая пересекающихся выпуклых многогранников, приведем некоторые сведения из теории выпуклых множеств (см. [2–4]).

Пусть в вещественном векторном пространстве E задано непустое выпуклое множество M. Введем в E бинарное отношение, полагая $x \overset{M}{\preccurlyeq} y$, если найдется $t > 0$ такое, что

$$y + t(y - x) \in M, \quad y - t(y - x) \in M.$$

Введенное отношение в E, как нетрудно проверить, является транзитивным, а его сужение на M – предпорядком.

Если Q -выпуклое подмножество выпуклого множества M, то множество

$$\Gamma_Q(M) = \{x \in M : x \overset{M}{\preccurlyeq} y \quad \text{при некотором} \quad y \in Q\}$$

будем называть гранью множества M. Нетрудно проверить, что каждая грань $\Gamma_Q(M)$ является выпуклым множеством и её аффинная оболочка аф.об. $\Gamma_Q(M)$ совпадает с

$$L_Q(M) = \{x \in E : x \overset{M}{\preccurlyeq} y \quad \text{при некотором} \quad y \in Q\}.$$

Далее, при любом аддитивном и однородном функционале f определенное выше множество $H(f, M)$ пересекается с выпуклым множеством M по некоторой грани.

Допустим теперь, что функционалы $f_1, f_2, \ldots, f_r$ разделяют выпуклые множества $M_1, M_2, \ldots, M_r$, имеющие непустое пересечение Q. В этом случае, как уже отмечалось, имеют место соотношения (3) и (4). А это означает, что при любом $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$

$$H(f_j, M_j) \supset \Gamma_Q(M_j) \cup \Gamma_Q\Big(\bigcap_{i \neq j} M_i\Big)$$

и, следовательно,

$$H(f_j, M_j) \supset \text{аф.об.}\ \Big(\Gamma_Q(M_j) \cup \Gamma_Q\Big(\bigcap_{i \neq j} M_i\Big)\Big).$$

Таким образом, функционал f_j, может быть нетривиальным лишь в случае, когда аффинное многообразие

$$L_j = \text{аф. об. } (\Gamma_a(M_j) \cup \Gamma_a(\bigcap_{i \neq j} M_i)) \tag{7}$$

не совпадает со всем пространством E. Следовательно, в случае пересекающихся выпуклых множеств, для существования разделяющих функционалов необходимо, чтобы

$$\bigcap_{j=1}^{z} L_j \neq E . \tag{8}$$

Заметим, что для любых $z \geq 2$ выпуклых множеств $M_1, M_2, \ldots, M_z$, имеющих непустое пересечение Q, аффинные многообразия (7) удовлетворяют соотношениям

$$L_j \cap M_j = \Gamma_a(M_j), \quad j = 1, 2, \ldots, z ,$$

и потому они не совпадают со всем пространством E по крайней мере для тех j, при которых $\Gamma_a(M_j) \neq M_j$. Для проверки указанного факта, очевидно, достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма I. Если выпуклые множества M и N имеют непустое пересечение Q, то аффинное многообразие

$$L = \text{аф. об.} (\Gamma_a(M) \cup \Gamma_a(N))$$

не имеет общих точек с множеством $M \setminus \Gamma_a(M)$.

Доказательство. Требуется показать, что для каждой точки $x \in L \cap M$ найдется точка $y \in Q$ такая, что $x \overset{M}{\leqslant} y$. Рассмотрим произвольную точку $x \in L \cap M$. Будучи точкой аффинного многообразия L, она представима в виде $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, где $x_1 \in L_a(M)$, $x_2 \in L_a(N)$. Это означает, что при некоторых $z_1, z_2 \in Q$ справедливы соотношения $x_1 \overset{M}{\leqslant} z_1$, $x_2 \overset{N}{\leqslant} z_2$. Но тогда для точки $z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ по транзитивности рассматриваемых отношений имеем:

$$x_1 \overset{M}{\leqslant} z, \quad x_2 \overset{N}{\leqslant} z .$$

В качестве искомой точки $y \in Q$ может быть принята при достаточно малом $\lambda > 0$ точка $z + \lambda(x_2 - z)$ (см. рис. I, отвечающий случаю, когда точки x_1, x_2, z – аффинно независимые, т.е. не лежат на одной прямой).

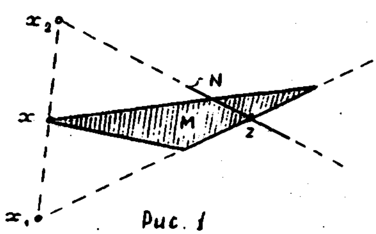

Рис. 1

В случае выпуклых многогранников высказанные утверждения относительно разделения выпуклых множеств с непустым пересечением удается существенно дополнить. А именно, оказывается справедливой следующая

Т е о р е м а 2. Если $r \geq 2$ выпуклых многогранников $M_1, M_2, \ldots, M_r$, имеют непустое пересечение Q, то условие (8) является не только необходимым, но и достаточным для существования разделяющих функционалов. При этом, если указанное условие выполнено, то существуют такие разделяющие функционалы $f_1, f_2, \ldots, f_r$, что

$$H(f_j, M_j) \cap M_j = L_j \cap M_j - \Gamma_Q(M_j), \quad j = 1, 2, \ldots, r, \tag{9}$$

и при тех j, при которых $L_j \neq E$, функционалы f_j - нетривиальные.

Напомним, что выпуклое множество M в вещественном векторном пространстве E называется выпуклым многогранником, если выполнены условия

1^0 Множество M является $(*)$-замкнутым (вместе с каждым открытым отрезком содержит его концы);

2^0 Отношение эквивалентности в M, порождаемое предпорядком $\overset{M}{\preccurlyeq}$, разбивает M на конечное число классов.

Нетрудно видеть, что условие 2^0 для выпуклого множества M равносильно следующему

2^{00} Множество M имеет конечное число граней.

При этом, если выпуклое множество M удовлетворяет условию 2^0 или, что то же, условию 2^{00}, то каждая непустая грань множества M порождается некоторым одноэлементным подмножеством Q.

§ 2. Доказательство теорем I и 2.

Помимо перечисленных выше фактов нам потребуются еще два вспомогательных предложения, доказательство которых можно найти, например, в [4] (см. теоремы I2 и I4).

Л е м м а 2. Если непустой выпуклый многогранник M и подпространство L не имеют общих точек, то существует (очевидно, нетривиальный) аддитивный и однородный функционал f такой, что

$$s(f, M) < 0, \quad L \subset \{x : f(x) = 0\}.$$

Л е м м а 3. Если выпуклый многогранник M и подпространство L имеют непустое пересечение Q и при этом аффинная оболочка множества $\Gamma_Q(M) \cup L$ не совпадает со всем пространством, то существует нетривиальный аддитивный и однородной функционал f такой, что

$$s(f,M)=0, \quad L\subset H(f,M), \; H(f,M)\cap M=\Gamma_a(M).$$

Переходя к доказательству интересующих нас теорем предположим, что в вещественном векторном пространстве E заданы $\tau \geq 2$ непустых выпуклых многогранников $M_1, M_2, \ldots, M_\tau$. Рассмотрим векторное пространство $\tilde{E}$, представляющее из себя декартово произведение τ экземпляров исходного пространства E, и в нем – выпуклый многогранник

$$\tilde{M}=\{\tilde{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_\tau): x_i\in M_i, \; i=1,2,\ldots,\tau\} \tag{10}$$

(декартово произведение заданных многогранников) и диагональное подпространство

$$\tilde{L}=\{\tilde{x}=(x, x, \ldots, x): x\in E\}. \tag{11}$$

Заметим, что каждый аддитивный и однородный функционал $\tilde{f}$ в $\tilde{E}$ индуцирует аддитивные и однородные функционалы $f_1, f_2, \ldots, f_\tau$ в E такие, что при любом $\tilde{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_\tau)\in\tilde{E}$ имеет место равенство $\tilde{f}(\tilde{x})=\sum_{i=1}^{\tau} f_i(x_i)$. При этом, очевидно, если

$$\tilde{L}\subset\{\tilde{x}\in\tilde{E}: \tilde{f}(\tilde{x})=0\},$$

то индуцируемые $\tilde{f}$ функционалы в E удовлетворяют условию (1).

Допустим, что заданные многогранники M_i не имеют общих точек, т.е. удовлетворяют условию (6). Тогда для выпуклого многогранника (10) и подпространства (11) выполнены предположения леммы 2. Поэтому в $\tilde{E}$ существует нетривиальный аддитивный и однородный функционал $\tilde{f}$ такой, что

$$s(\tilde{f},\tilde{M})<0, \quad \tilde{L}\subset\{\tilde{x}\in\tilde{E}: \tilde{f}(\tilde{x})=0\}.$$

Но тогда индуцируемые $\tilde{f}$ функционалы в E, как нетрудно видеть, разделяют многогранники $M_1, M_2, \ldots, M_\tau$ и удовлетворяют соотношению (5). Таким образом, теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 предположим, что заданные многогранники M_i имеют непустое пересечение Q. Тогда выпуклый многогранник $\tilde{M}$ и подпространство $\tilde{L}$ пересекаются по множеству

$$\tilde{Q}=\{\tilde{x}=(x, x, \ldots, x): x\in Q\}.$$

При этом $\Gamma_{\tilde{a}}(\tilde{M})=\prod_{i=1}^{\tau}\Gamma_a(M_i)$, $L_{\tilde{a}}(\tilde{M})=\prod_{i=1}^{\tau}L_a(M_i)$ и, следовательно

$$\text{aff.об.}\;(\Gamma_{\tilde{a}}(\tilde{M})\cup\tilde{L})=\prod_{i=1}^{\tau}L_a(M_i)-\tilde{L}, \tag{12}$$

где под $\prod_{i=1}^{\tau}A_i$ понимается декартово произведение множеств A_i, а под $A-B$ – алгебраическая разность соответствующих множеств, т.е. $\{z=x-y: x\in A, \; y\in B\}$.

Если подпространство (I2) совпадает со всем пространством $\tilde{E}$, т.е. каждая точка $\tilde{z} \in \tilde{E}$ представима в виде $\tilde{z} = \tilde{x} - \tilde{y}$, где

$$\tilde{x} \in \bigcap_{i \neq j} L_a(M_i), \quad \tilde{y} \in \tilde{L},$$

то, каковы бы ни были $x \in E$, $x_0 \in Q$, $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, найдется точка $y \in E$ такая, что

$$y \in \bigcap_{i \neq j} L_a(M_i) = L_a\left(\bigcap_{i \neq j} M_i\right), \quad x - x_0 + y \in L_a(M_j).$$

Но тогда аффинное многообразие L_j, определяемое согласно (7), содержит точку $x = (x - x_0 + y) + x_0 - y$. Ввиду произвольности последней, а также $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, отсюда следует, что в рассматриваемом случае нарушено условие (8).

Таким образом, при выполнении условия (8) подпространство (I2) не совпадает со всем пространством $\tilde{E}$. В силу леммы 3 найдется нетривиальный аддитивный и однородный функционал $\tilde{f}$ такой, что

$$s(\tilde{f}, \tilde{M}) = 0, \quad \tilde{L} \subset H(\tilde{f}, \tilde{M}), \quad H(\tilde{f}, \tilde{M}) \cap \tilde{M} = \Gamma_{\tilde{a}}(\tilde{M}).$$

Нетрудно видеть, что индуцируемые $\tilde{f}$ функционалы $f_1, f_2, \ldots, f_r$ в E разделяют заданные многогранники $M_1, M_2, \ldots, M_r$ и при этом имеют место соотношения (9). Отсюда следует справедливость теоремы 2 при $r = 2$. Однако, при $r > 2$ найденные функционалы, вообще говоря, не могут быть приняты в качестве искомых. Может оказаться, что для некоторых j, при которых $L_j \neq E$, функционалы f_j – тривиальные.

Пусть указанная возможность реализуется при некотором $j = j_0$. Тогда соответствующая грань $\Gamma_a(M_{j_0})$, как следует из (9), совпадает со всем многогранником M_{j_0}. Далее, ввиду справедливости теоремы при $r = 2$, найдется нетривиальный функционал f такой, что функционалы f и $-f$ разделяют выпуклые многогранники M_{j_0} и $\bigcap_{i \neq j_0} M_i$. При этом

$$H(f, M_{j_0}) = H\left(-f, \bigcap_{i \neq j} M_i\right) \supset L_{j_0}.$$

Зафиксировав некоторую точку $x_0 \in M_{j_0}$ и точку $y_0 \in E$, в которой $f(y_0) < s(f, M_{j_0})$ рассмотрим выпуклый многогранник

$$N = \{y = x + t(y_0 - x_0) : x \in M_{j_0}, \ t \in [0, 1]\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$N \cap \left(\bigcap_{i \neq j_0} M_i\right) = M_{j_0} \cap \left(\bigcap_{i \neq j_0} M_i\right) = Q,$$

$$\Gamma_a(N) = \Gamma_a(M_{j_0}) = M_{j_0},$$

аф. об. $(\Gamma_a(N) \cup \Gamma_a(\bigcap_{i \neq j_0} M_i) = L_{j_0} + E$.

По доказанной части теоремы найдутся функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_z$, разделяющие многогранники $M_1, \ldots, M_{j_0-1}, N, M_{j_0+1}, \ldots, M_z$, причем такие, что

$$H(\varphi_{j_0}, N) \cap N = \Gamma_a(N) \neq N ,$$

т.е.функционал φ_{j_0} – нетривиальный.

Рассмотрим функционалы $\psi_j = f_j + \lambda\varphi_j$, $j = 1, 2, \ldots, z$. При любом $\lambda > 0$ они, очевидно, разделяют исходные многогранники $M_1, M_2, \ldots, M_z$ и удовлетворяют соотношениям:

$$H(\psi_j, M_j) \cap M_j = \Gamma_a(M_j), \quad j = 1, 2, \ldots, z .$$

Кроме того,функционал ψ_{j_0} – нетривиальный и,за исключением быть может конечного числа значений параметра λ , для всех j , при которых $j_j \neq \Theta$, функционалы ψ_j также нетривиальные. Если найденные функционалы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_z$ все еще не удовлетворяют последнему требованию теоремы,то, повторяя проведенные рассуждения, строим новую систему разделнющих функционалов,среди которых нетривиальных по крайней мере на единицу больше. Через конечное число таких шагов приходим к системе функционалов,удовлетворяющей всем условиям теоремы 2.

Литература

1. А.Я.Дубовицкий, А.А.Милютин. Задачи на экстремум при наличии ограничений. Доклады АН СССР, 149 (1963), 759-762.
2. Г.Ш.Рубинштейн. Об отделении и разделении выпуклых множеств гиперплоскостями. Доклады АН СССР, 78, № 2 (1951), 213-215.
3. Г.Ш.Рубинштейн. Об одном методе исследования выпуклых множеств. Доклады АН СССР, 102, № 3 (1955), 451-455.
4. Г.Ш.Рубинштейн. Теоремы отделимости выпуклых множеств, Сибирский математ. журнал, 5, № 5 (1964), 1098-1124.

Поступила в редакцию
20.IX - 1969 г.