УДК 513.88:513.83 + 512.25/26

ТОЧЕЧНО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ НА КОНУСЕ

А.М.Рубинов

В работе рассматриваются вогнутые положительно однородные отображения, определенные на замкнутом выпуклом конусе локально-выпуклого пространства. Определяются двойственные отображения и изучаются их свойства. Полученные результаты находят применение в теории динамических моделей производства [1]. При исследовании двойственных отображений существенно используются свойства суперлинейных функционалов. Эти свойства кратко, без доказательств, излагаются в 1°. (Подробное изложение результатов 1° см. в [2]).

В конечномерном случае точечно-множественные отображения, определенные на конусе, изучались в работах Р.Т.Рокафеллера [3.4], который использовал эти отображения для исследования двойственных задач выпуклого программирования. В указанных работах, в частности, определено двойственное отображение и описаны его свойства. Двойственное отображение было также определено и изучено (в немного более общей ситуации) в работах автора [5, 6] ,опубликованных несколько позднее работ Рокафеллера.

1°. Рассмотрим локально выпуклое пространство X и выпуклый замкнутый конус K в этом пространстве (напомним, что согласно Н.Бурбаки [7] подмножество K пространства X называется конусом, если $\lambda K \subset K$ при любом $\lambda > 0$). Условимся о следующих обозначениях. Через X^* будем обозначать пространство, сопряженное к X ,через K^* -конус, сопряженный к K . Элементы K^* будем называть положительными функционалами. Через X' обозначим пространство, совпадающее по составу элементов с X^*, но наделенное топологией $\sigma(X^*, X)$; через K' обозначим конус в X' ,совпадающий по составу элементов с K^*.

Функционал q ,определенный на K назовем суперлинейным, если он положительно однороден $(q(\lambda x) = \lambda q(x),\ \lambda > 0,\ x \in K)$, супераддитивен $(q(x+y) \geqslant q(x)+q(y) \quad (x, y \in K))$ и полунепрерывен сверху. Линейный функционал h назовем опорным к q, если $h(x) \geqslant q(x)$ для всех x из K. Множество всех линейных функционалов, опорных к q, обозначим через $\mathcal{U}_q$. Справедлива

Теорема I.I. (Л.Хермандер [8]). Если q -суперлинейный функционал, определенный на конусе K, то множество $\mathcal{U}_q$ непусто; при этом для любого $x \in K$

$$q(x) = \inf_{h \in \mathcal{U}_q} h(x).$$

Совокупность всех суперлинейных функционалов, определенных на K, обозначим через $Q(K)$. Введем в $Q(K)$ естественным образом операции сложения и умножения на неотрицательное число, а также отношение порядка; тем самым $Q(K)$ превращается в упорядоченную полугруппу с операторами из полугруппы R^+ (неотрицательных вещественных чисел).

Непустое подмножество $\mathcal{U}$ пространства X' назовем K'-устойчивым, если $\mathcal{U}+K' \subset \mathcal{U}$; подмножество $\mathcal{U}$ этого пространства назовем K-опорным, если оно выпукло, замкнуто, K'-устойчиво и, кроме того, $\inf_{x \in \mathcal{U}} h(x) > -\infty$. Совокупность всех K-опорных множеств обозначим через $\Xi'(K)$. Введем в $\Xi'(K)$ отношение порядка, положив $\mathcal{U}_1 > \mathcal{U}_2$, если $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_2'$ $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \Xi'(K))$. Естественным образом введем в $\Xi'(K)$ операцию умножения на положительное число. Кроме того, положим $0 \cdot \mathcal{U} = K'$. Если $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \Xi'(K)$, $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \neq K'$, то через $\mathcal{U}_1 \dotplus \mathcal{U}_2$ обозначим замыкание (в X') множества $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$. Кроме того, $\mathcal{U} \dotplus K' = K' + \mathcal{U} = \mathcal{U}$. Относительно введенного отношения порядка, операции $\dotplus$ и умножения на неотрицательные числа $\Xi'(K)$ является упорядоченной полугруппой с операторами из R^+.

Теорема I.2. Отображение $q \to \mathcal{U}_q$ является изоморфизмом упорядоченных полугрупп с операторами $Q(K)$ и $\Xi'(K)$.

Функционал p, определенный на K, назовем сублинейным, если $-p$ - является суперлинейным функционалом. Линейный функционал h называется опорным к сублинейному функционалу p, если $h(x) \leqslant p(x)$ для всех x из K. Множество всех линейных функционалов, опорных к сублинейному p, обозначим так же, как и для суперлинейного функционала символом $\mathcal{U}_p$ (это не приведет к путанице, так как из контекста всегда будет ясно, о каком функционале идет речь). Положим также $(\mathcal{U}_p)^+ = \mathcal{U}_p \cap K'$. Сублинейный функционал p назовем вполне положительным, если

$$p(x) = \sup_{h \in (\mathcal{U}_p)^+} h(x) \qquad (x \in K).$$

При изучении вполне положительных функционалов важную роль играют нормальные множества.

Рассмотрим локально выпуклое пространство X, в котором выделен выпуклый замкнутый конус K. Подмножество Ω конуса K назовем нормальным (в смысле K), если $\overline{\Omega - K} \cap K = \Omega$. (Здесь черта означает замыкание). Из определения непосредственно следует, что компактное подмножество Ω конуса K нормально тогда и только тогда, когда с каждой своей точкой x оно содержит конусный отрезок $\langle o, x \rangle$.

Нормальной оболочкой подмножества Ω конуса K назовем пересечение всех нормальных множеств, содержащих Ω. Нормальную оболочку Ω обозначим символом $n\Omega$.

Лемма I.I. Если $\Omega \subset K$, то $n\Omega = \overline{\Omega - K} \cap K$.

Рассмотрим теперь снова сублинейные функционалы на конусе K. Имеет место

Теорема I.3. Пусть p - сублинейный функционал, определенный на конусе K и обладающий следующим свойством: найдется подмножество ξ конуса K' такое, что

$$p(x) = \sup_{h \in \xi} h(x) \qquad (x \in K).$$

Тогда I) функционал p вполне положителен; 2) множество $(\mathcal{U}_p)^+$ совпадает с нормальной оболочкой (в смысле K') выпуклой оболочки множества ξ.

2°. Рассмотрим некоторое множество X. Совокупность всех непустых подмножеств X обозначим через $\Xi(X)$.

Рассмотрим теперь два множества: X и Y, а также отображение a множества X в $\Xi(Y)$. Условимся продолжение отображения a на $\Xi(X)$, ставящее в соответствие каждому ξ из $\Xi(X)$ подмножество $\bigcup_{x \in \xi} a(x)$ множества Y, обозначать тем же символом a, что и исходное отображение. Если a -отображение X в $\Xi(Y)$, то на множестве $a(X)$ можно определить отображение a^{-1}, обратное к a

$$a^{-1}(y) = \{x \in X \mid y \in a(x)\} \qquad (y \in a(X)).$$

Ясно, что $a^{-1}(a(X)) = X$ и, кроме того, $(a^{-1})^{-1} = a$

Графиком отображения a (множества X в $\Xi(Y)$) называется множество

$$Z = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in X,\ y \in a(x)\}.$$

Заметим, что всякое подмножество Z прямого произведения $X \times Y$, обладающее тем свойством, что $Pr_1 Z = X$, можно рассматривать как график некоторого отображения a множества X в $\Xi(Y)$, где

$$a(x)=\{y\in Y \mid (x,y)\in Z\}.$$

В случае, когда X и Y - топологические пространства, точечно-множественные отображения подробно изучались К.Бержем [9].

Рассмотрим теперь точечно-множественные отображения, определенные на выпуклом конусе векторного пространства. Пусть X_1 и X_2 -векторные пространства, в которых выделены выпуклые заостренные[ж)] конуса K_1 и K_2 соответственно.

Будем говорить, что отображение a конуса K_1 в $\Xi(K_2)$ вогнуто, если $a(\alpha x+\beta y)\supset \alpha a(x)+\beta a(y)$ $(\alpha,\beta\geq 0,\ \alpha+\beta=1,\ x,y\in K_1)$; положительно однородно, если $a(\lambda x)=\lambda a(x)$ $(\lambda>0,\ x\in K_1)$; супераддитивно, если $a(x_1+x_2)\supset a(x_1)+a(x_2)$ $(x_1,x_2\in K_1)$; гейловское, сли $a(0)=0$.

Приведем(без доказательства)некоторые простые леммы, описывающие свойства определенных выше отображений.

Л е м м а 2.1. Если отображение a вогнуто и положительно однородно, то оно супераддитивно; если a супераддитивно и положительно однородно, то оно вогнуто; если a супераддитивно, вогнуто и $0\in a(0)$, то оно положительно однородно.

Л е м м а 2.2. Пусть a - супераддитивное отображение и существует элемент x из K_1 такой, что множество $a(x)$ алгебраически ограничено (т.е. $\sup\{\lambda \mid y+\lambda z\in a(x)\}<\infty$ для любых $y\in a(x)$ и $z\in X_2$). Тогда a - гейловское отображение.

Л е м м а 2.3. Если a - вогнутое отображение, ξ -выпуклое подмножество конуса K_1, то множество $a(\xi)$ выпукло.

С л е д с т в и е .Если a -вогнутое отображение, то множество $a(x)$ выпукло $(x\in K_1)$.

Л е м м а 2.4. Если отображение a обладает одним из следующих свойств: вогнутостью, положительной однородностью, супераддитивностью и, кроме того, множество $a(K_1)$ - конус, то и отображение a^{-1} обладает соответствующим свойством.

Л е м м а 2.5. Множество Z -график отображения a -выпукло тогда и только тогда, когда отображение a вогнуто; множество Z является конусом тогда и только тогда, когда a положительно однородно.

Л е м м а 2.6. Пусть K_1 и K_2 - выпуклые заостренные конуса в векторных пространствах X_1 и X_2 соответственно, имеющие окруженные точки [10]. Пусть далее a - вогнутое отображение K_1 в $\Xi(K_2)$, причем множество $a(K_1)$ содержит хо-

ж) Конус K называется заостренным, если $0\in K$.

тя бы одну окруженную точку конуса K_2. Тогда если x_0-окруженная точка конуса K_1, то множество $a(x_0)$ содержит окруженную точку конуса K_2.

Будем считать теперь, что X_1 и X_2 – локально выпуклые пространства, K_1 и K_2 – замкнутые выпуклые конуса (в пространствах X_1 и X_2, соответственно). Отображение a конуса K_1 в $\Xi(K_2)$ называется замкнутым, если график Z этого отображения является замкнутым (в пространстве $X_1 \times X_2$) множеством. Имеет место простая

Л е м м а 2.7. Если ξ – компактное подмножество K_1, a – замкнутое отображение K_1 в $\Xi(K_2)$, то множество $a(\xi)$ замкнуто.

С л е д с т в и е. Если a замкнутое отображение, то для любого $x \in K_1$ множество $a(x)$ замкнуто.

Введем теперь определение замыкания отображения. Если a – отображение конуса K_1 в $\Xi(K_2)$, то замыканием этого отображения назовем отображение $\bar{a}$ конуса K_1 в $\Xi(K_2)$, график которого $\bar{Z}$ совпадает с замыканием графика Z отображения a.

Л е м м а 2.8. Замыкание вогнутого отображения вогнуто, замыкание положительно однородного отображения положительно однородно.

Важную роль в дальнейшем играют отображения, которые мы назовем полунепрерывными сверху. Будем говорить, что отображение a конуса K_1 в $\Xi(K_2)$ полунепрерывно сверху, если для любого $g \in K_2^*$ функционал q_g, определенный на K_1 по формуле

$$q_g(x) = \sup_{y \in a(x)} g(y)$$

принимает лишь конечные значения и полунепрерывен сверху.

Если a – вогнутое, положительно однородное, полунепрерывное сверху отображение, то функционал q_g ($g \in K_2^*$) является суперлинейным.

Из леммы 2.3. следует, что справедлива

Л е м м а 2.9. Если a – супераддитивное, полунепрерывное сверху отображение, то оно является гейловским.

Отметим еще, что имеет место

Л е м м а 2. 10. Замыкание полунепрерывного сверху отображения полунепрерывно сверху.

Следующие леммы показывают, что класс полунепрерывных сверху отображений достаточно широк.

Л е м м а 2.11. Если отображение a полунепрерывно сверху в смысле Берка [9], то оно полунепрерывно сверху.

Л е м м а 2.12. Если отображение a таково, что множество $a(x)$ замкнуто выпукло и ограничено для любого $x \in K_1$ и, кроме того, a непрерывно как (однозначный)оператор со значениями в пространстве выпуклых множеств А.Г.Пинскера [II] , то a полунепрерывно сверху.

Вогнутое отображение a конуса K_1 в $\Xi(K_2)$ (K_i - конус в пространстве X_i (i =I, 2) назовем вполне замкнутым, если пространства X_1 и X_2 метризуемы и образ $a(\xi)$ любого слабо компактного подмножества ξ конуса K_1 является слабым компактом.

Лемма 2.I3. Вполне замкнутое отображение полунепрерывно сверху.

Важную роль в дальнейшем будут играть нормальные и усиленно нормальные отображения.

Вогнутое отображение a конуса K_1 в $\Xi(K_2)$ назовем нормальным, если для любого $x \in K_1$ множество $a(x)$ нормально (определение нормального множества см. в I^0).Нормальной оболочкой вогнутого отображения a назовем отображение na , которое каждому x из K_1 ставит в соответствие множество $na(x)$.

Лемма 2.I4. Если отображение a вогнуто,то и отображение na вогнуто.

Следствие. Нормальная оболочка вогнутого отображения является нормальным отображением.

Отметим три простых свойства нормальной оболочки:

I)Если отображение a полунепрерывно сверху,то и отображение na полунепрерывно сверху.

2)Если отображение a гейловское,то и отображение na гейловское.

3)Если отображение a положительно однородно, то и отображение na положительно однородно.

Вогнутое отображение a конуса K_1 в $\Xi(K_2)$ назовем усиленно нормальным, если график Z этого отображения таков, что

$$\overline{Z-(0\times K_2)} \cap (K_1 \times K_2) = Z$$

Лемма 2.I5.Усиленно нормальное отображение замкнуто и нормально.

Указанная лемма в некоторых случаях допускает обращение.

Лемма 2.I6. Пусть конусы K_1 и K_2 телесны; a -замкнутое нормальное отображение конуса K_1 в $\Xi(K_2)$, обладающее тем свойством, что множество $a(K_1)$ содержит внутреннюю точку конуса K_2 . Тогда отображение a усиленно нормально.

Лемма 2.I7. Вполне замкнутое нормальное отображение является усиленно нормальным.

Ниже (см 3^0) показано, что нормальное, полунепрерывное сверху, положительно однородное отображение усиленно нормально (и , следовательно, замкнуто).

Пусть a -вогнутое отображение конуса K_1 в $\Xi(K_2)$ и Z - график этого отображения. Отображение $n_o a$ назовем усиленно нормальной оболочкой a, если его график Z_o совпадает с пересечением всех подмножеств конуса $K_1 \times K_2$, содержащих Z и являющихся графиками усиленно нормальных отображений.

Л е м м а 2.18. Если a -вогнутое отображение, то отображение $n_o a$ усиленно нормально.

Л е м м а 2.19. График Z_o усиленно нормальной оболочки $n_o a$ вогнутого отображения a имеет вид

$$Z_o = \overline{Z-(0 \times K_2)} \cap (K_1 \times K_2),$$

где Z -график отображения a.

3°. Рассмотрим локально выпуклые пространства X_1 и X_2, в ко-...рых выделены выпуклые замкнутые конусы K_1 и K_2 соответствен-...но. Будем считать, что в пространстве X_i введено отношение пред-...порядка с помощью конуса K_i, в пространстве X_i' - с помощью ко-...нуса K_i' ($i = 1,2$). В этом пункте мы будем рассматривать (иног-...да не оговаривая этого особо) лишь вогнутые положительно однород-...ные отображения конуса K_1 в $\Xi(K_2)$.

Если a -отображение указанного выше вида, то (лемма 2.5) ...рафик Z этого отображения является выпуклым конусом. Как извест-...о, при изучении выпуклых конусов важную роль играют поляры к ...тим конусам (сопряженные конусы). Однако при исследовании задач, ...озникающих в теории динамических моделей производства, оказывает-...я удобным рассматривать не поляру Z^* конуса Z, а несколько ...тличный от поляры объект, который мы назовем двойственным к Z, ...нусом и обозначим символом Z^+. По определению,

$$Z^+ = \{(f,g) \in K_1' \times K_2' \,/\, f(x) \geq g(y) \text{ для любой пары } (x,y) \in Z\}.$$

Ясно, что Z^+ -выпуклый замкнутый в $X_1' \times X_2'$ конус. Заметим, что конус Z^+ не пуст и, более того, $Pr_1 Z^+ = K_1'$.

Укажем на связь между сопряженным и двойственным конусами. ...этой целью положим

$$W^+ = \{(f,g) \in K_1' \times (-K_2') \,/\, (f,-g) \in Z^+\}.$$

...о, что

$$W^+ = Z^* \cap (K_1' \times (-K_2')).$$

Отображение a' конуса K_1' в $\Xi(K_2')$, графиком которого ...ся конус Z_1^+ назовем двойственным по отношению к отображе-...

...м м а 3.1. Отображение a' (конуса K_1' в $\Xi(K_2')$)вог-..., положительно однородно и усиленно нормально.

Так как a' -вогнуто и положительно однородно, то имеет смысл говорить об отображении, двойственном к a'. Это отображение мы будем обозначать символом a'' и называть вторым двойственным по отношению к a. По определению, $a''(x)=\{y\in K_2 \mid f(x)\geq g(y)$ для любого $f\in K_1'$ и любого $g\in a'(f)\}$ $(x\in K_1)$.
Имеет место

Теорема 3.I. Отображение, второе двойственное к отображению a, совпадает с усиленно нормальной оболочкой a. Иными словами,

$$a''=n_0 a .$$

Доказательство. Обозначим через Z и Z'' графики отображений a и a'' соответственно. Учитывая лемму 2.I9, мы должны показать, что

$$Z''=\overline{Z-(0\times K_2)}\cap(K_1\times K_2) .$$

Из леммы 3.I. следует, что

$$Z''\supset\overline{Z-(0\times K_2)}\cap(K_1\times K_2) .$$

Покажем теперь, что справедливо обратное включение. Предполагая противное, найдем элемент (x,y) из конуса Z'' такой, что

$$(x,y)\notin\overline{Z-(0\times K_2)}\cap(K_1\times K_2).$$

Ясно, что $(x,y)\notin\overline{Z-(0\times K_2)}$; учитывая, что множество $Z-(0\times K_2)$ является конусом, найдем функционал $(f,g)\in X_1'\times X_2'$ такой, что

$$f(x)+g(y)<0=\inf_{(u,v)\in Z-(0\times K_2)} f(u)+g(v) . \tag{3.1}$$

Из правой части (3.I) легко следует, что

$$f\in K_1' ,\ -g\in K_2' ;\ f(u)\geq -g(v)\quad ((u,v)\in Z) . \tag{3.2}$$

Из (3.2) вытекает, что $(f,-g)\in Z'$, и потому, учитывая, что $(x,y)\in Z''$, получим $f(x)\geq -g(y)$, что противоречит левой части (3.I). Полученное противоречие и доказывает теорему.

Вогнутое положительно однородное отображение a назовем рефлексивным, если $a=a''$. Из теоремы 3.I вытекает

Следствие. Для того, чтобы отображение a было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы оно было усиленно нормальным.

Нетрудно проверить, что $(n_0 a)'=a'$. Таким образом как следует из теоремы 3.I $(a'')'=a'$. С другой стороны, поскольку отображение a' усиленно нормально, то оно рефлексивно, т.е. $(a')''=a'$. Таким образом,

$$(a'')' = (a')'' = a'.$$

Перейдем теперь к изучению двойственного и второго двойственного к полунепрерывному сверху отображению. Условимся совокупность всех полунепрерывных сверху, вогнутых положительно однородных отображений конуса K_1 в $\Xi(K_2)$ обозначать символом $A(K_1, K_2)$.

Т е о р е м а 3.2. Если $a \in A(K_1, K_2)$, то $a'(K_1') = K_2'$.

При этом для любых x из K_1 и $g \in K_2'$

$$\sup_{y \in a(x)} g(y) = \inf_{f \in (a')^{-1}(g)} f(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $a \in A(K_1, K_2)$, то для любого $g \in K_2'$ функционал q_g:

$$q_g(x) = \sup_{y \in a(x)} g(y)$$

суперлинеен. Нетрудно проверить, что множество $\mathcal{U}_{q_g}$ всех линейных функционалов, опорных к q_g, совпадает с $(a')^{-1}(g)$. Из теоремы I.I вытекает теперь, что для любого g из K_2' множество $(a')^{-1}(g)$ непусто (т.е. $a'(K_1') = K_2'$) и, кроме того,

$$q_g(x) = \sup_{y \in a(x)} g(y) = \inf_{f \in (a')^{-1}(g)} f(x) \qquad (x \in K_1).$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 3.3. Если $a \in A(K_1, K_2)$, то $a'' = na$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in K_1$; покажем, что $a''(x) = na(x)$. Заметим, что в силу теоремы 3.2 множество $(a')^{-1}(g)$ непусто для любого $g \in K_2'$, поэтому мы можем определить на конусе K_2' функционал p_x, положив для $g \in K_2'$

$$p_x(g) = \inf_{f \in (a')^{-1}(g)} f(x).$$

Снова используя теорему 3.2, получим, что

$$p_x(g) = \sup_{y \in a(x)} g(y), \tag{3.3}$$

откуда следует (см. теорему I.3), что функционал p_x сублинеен и вполне положителен (в пространстве X_2'). Нетрудно проверить, что

$$(\mathcal{U}_{p_x})^+ = a''(x).$$

Снова привлекая теорему I.3 и используя (3.3), получим, что

$$(\mathcal{U}_{p_x})' = na(x).$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е I. Если $a \in A(K_1, K_2)$ и a нормально, то a усиленно нормально (и, следовательно, замкнуто).

Следствие 2. Если $a \in A(K_1, K_2)$, то и $a'' \in A(K_1, K_2)$.

Символом $\Psi(K_1, K_2')$ обозначим совокупность всех функционалов ψ, определенных на $K_1 \times K_2'$ и таких, что при фиксированном $g \in K_2'$ функционал q_g:

$$q_g(x) = \psi(x, g) \qquad (x \in K_1)$$

является суперлинейным, а при фиксированном x из K_1 функционал p_x:

$$p_x(g) = \psi(x, g) \tag{3.4}$$

сублинеен и вполне положителен.

Каждому отображению a из $A(K_1, K_2)$ поставим в соответствие функционал ψ_a, определенный на $K_1 \times K_2'$ по формуле

$$\psi_a(x, g) = \sup_{y \in a(x)} g(y) \quad (x \in K_1,\ g \in K_2'). \tag{3.5}$$

Из свойств отображения a следует, что $\psi_a \in \Psi$.

Пусть теперь $\psi \in \Psi(K_1, K_2')$. Положим для $x \in K_1$

$$a(x) = (\mathcal{U} p_x)^+ , \tag{3.6}$$

где p_x - функционал, определенный формулой (3.4). Нетрудно проверить, что отображение a, определенное формулой (3.6), вогнуто и положительно однородно. Из теоремы I.3 следует, что отображение a нормально. Из свойств функционала ψ вытекает, что это отображение полунепрерывно сверху. Отметим еще, что, как вытекает непосредственно из определения, функционал ψ_a, построенный по отображению a с помощью формулы (3.5), совпадает с ψ.

Совокупность всех нормальных полунепрерывных сверху отображений обозначим символом $A^n(K_1, K_2)$. Мы показали, таким образом,что справедлива следующая

Теорема 3.4. Отображение

$$a \longrightarrow \psi_a$$

является биективным отображением $A^n(K_1, K_2)$ в $\Psi(K_1, K_2')$.

Используя свойства функционала ψ_a, построенного по формуле (3.5) ,и теорему о минимаксе, можно существенно обобщить теорему 3.2. Точнее говоря, имеет место

Теорема 3.5. Если $a \in A(K_1, K_2)$, Ω_1 - слабо компактное выпуклое подмножество конуса K_1, Ω_2 - выпуклое подмножество конуса K_2', то

$$\sup_{x\in\Omega_1}\ \inf_{f\in(a')^{-1}(\Omega_2)} f(x)=\inf_{g\in\Omega_2}\ \sup_{y\in a(\Omega_1)} g(y).$$

Символом $A_v(K_1,K_2)$ обозначим совокупность всех вогнутых положительно однородных отображений a конуса K_1 в $\Xi(K_2)$, обладающих теми свойствами, что

I) $a(K_1)=K_2$;

2) для любого $f\in K_1'$ функционал p_f :

$$p_f(y)=\inf_{x\in a^{-1}(y)} f(x) \qquad (y\in K_2)$$

сублинеен и вполне положителен

3) $0\in a(x) \qquad (x\in K_1)$.

Из теоремы 3.2 следует, что отображение a', двойственное к отображению a из $A(K_1,K_2)$, принадлежит множеству $A_v(K_1';K_2')$ Действительно, в силу этой теоремы $a'(K_1')=K_2'$ и, кроме того, из соотношения

$$\inf_{f\in(a')^{-1}(g)} f(x)=\sup_{y\in a(x)} g(y)$$

следует, в силу теоремы I.3, что для любого x из K_1 функционал p_x:

$$p_x(g)=\inf_{f\in(a')^{-1}(g)} f(x) \qquad (g\in K_2')$$

сублинеен и вполне положителен.

Имеет место

Т е о р е м а 3.6. Если $a\in A_v(K_1,K_2)$, то $a'\in A(K_1',K_2')$. При этом

$$\inf_{x\in a^{-1}(y)} f(x)=\sup_{g\in a'(f)} g(y).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функционал p_f, определенный на конусе K_2 по формуле

$$p_f(y)=\inf_{x\in a^{-1}(y)} f(x)$$

сублинеен и вполне положителен. Нетрудно проверить, что $(\mathcal{U}p_f)'=a'(f)$ и поэтому

$$p_f(y)=\inf_{x\in a^{-1}(y)} f(x)=\sup_{g\in a'(f)} g(y).$$

Полунепрерывность сверху отображения a' следует непосредственно из приведенной формулы. Теорема доказана.

Теорема 3.7. Если $a \in A_v(K_1, K_2)$, то $a'' = \bar{a}$.

Доказательство. Пусть $y \in K_2$. В силу теоремы 3.6 функционал q_y, определенный на конусе K_1' по формуле

$$q_y(f) = \sup_{g \in a'(f)} g(y) \qquad (f \in K_1')$$

суперлинеен. Нетрудно показать, используя эту теорему, что $U_{q_y} = \overline{a^{-1}(y)}$. С другой стороны легко убедиться в том, что $U_{q_y} = (a'')^{-1}(y)$. Таким образом,

$$(a'')^{-1}(y) = \overline{(a^{-1})(y)}.$$

Из полученного соотношения легко вытекает, что $(a'')^{-1} = \overline{a^{-1}}$. С другой стороны $\overline{a^{-1}} = (\bar{a})^{-1}$, и потому

$$(a'')^{-1} = (\bar{a})^{-1}$$

откуда и следует нужное нам соотношение.

Символом Φ обозначим совокупность функционалов φ, определенных на $K_1' \times K_2$ и таких, что при фиксированном y из K_2 функционал $q_y : q_y(f) = \varphi(f, y)$ $(f \in K_1')$ суперлинеен (в $\sigma(X', X)$), а при фиксированном $f \in K_1'$ функционал p_f : $p_f(y) = \varphi(f, y)$ $(y \in K_2)$ сублинеен и вполнё положителен.

Если $a \in A_v(K_1, K_2)$, то функционал φ_a, определенный на $K_1' \times K_2$ по формуле

$$\varphi_a(f, y) = \inf_{x \in a^{-1}(y)} f(x) \qquad ((f, y) \in K_1' \times K_2)$$

входит в множество Φ.

Символом $A_v^r(K_1, K_2)$ обозначим совокупность всех рефлексивных (или, что то же самое, замкнутых) отображений из $A_v(K_1, K_2)$. Нетрудно проверить, что справедлив следующий аналог теоремы 3.4.

Теорема 3.8. Отображение

$$a \to \varphi_a$$

является биективным отображением $A_v^r(K_1, K_2)$ в Φ.

Имеет место также аналог теоремы 3.5.

Теорема 3.9. Если $a \in A_v(K_1, K_2)$, Ω_1 – компактное выпуклое подмножество конуса K_1', Ω_2 –выпуклое подмножество конуса K_2, то

$$\sup_{f \in \Omega_1} \inf_{x \in a^{-1}(\Omega_2)} f(x) = \inf_{y \in \Omega_2} \sup_{g \in a'(\Omega_1)} g(y).$$

4°. В этом пункте мы рассмотрим произведение двух отображений.

Рассмотрим множества K_1, K_2, K_3 и отображения a, множества K_i в $\Xi(K_{i+1})$ $(i=1,2)$. Произведением отображений a_1 и a_2 называется отображение $a_2 \circ a_1$ множества K_1 в $\Xi(K_3)$, определенное по формуле

$$a_2 \circ a_1(x) = a_2(a_1(x)).$$

Нетрудно проверить, что имеет место соотношение

$$(a_2 \circ a_1)^{-1} = a_1^{-1} \circ a_2^{-1}.$$

Предположим теперь, что K_1, K_2, K_3 суть заостренные конусы в векторных пространствах X_1, X_2, X_3 соответственно. Имеет место следующая простая

Лемма 4.1. Если отображения a_1 и a_2 обладают одним из следующих свойств: вогнутостью, положительной однородностью, супераддитивностью, являются гейловскими, то и отображение $a_2 \circ a_1$ обладает тем же свойством.

Будем теперь считать, что пространства X_i $(i=1,2,3)$ локально выпуклы, конусы K_i $(i=1,2,3)$ – замкнуты.

Лемма 4.2. Если пространства X_i $(i=1,2,3)$ метризуемы, отображение a_1 вполне замкнуто, отображение a_2 замкнуто, то отображение $a_2 \circ a_1$ замкнуто.

Лемма 4.3. Произведение вполне замкнутых отображений вполне замкнуто.

Важную роль при исследовании моделей экономики играет следующая

Теорема 4.1. Пусть $a_i \in A(K_i, K_{i+1})$ $(i=1,2)$ и кроме того, для любого $x \in K_1$ множество $a_1(x)$ слабо компактно. Тогда $a_2 \circ a_1 \in A(K_1, K_3)$ и

$$(a_2 \circ a_1)' = \overline{a_2' \circ a_1'} \tag{4.1}$$

(Здесь черта означает замыкание отображения в пространстве $X_1' \times X_3'$).

Доказательство. Из леммы 4.1 следует, что отображение $a_2 \circ a_1$ вогнуто и положительно однородно. Покажем, что оно полунепрерывно сверху. Пусть $h \in K_3'$. Рассмотрим функционал q_h:

$$q_h(x) = \sup_{z \in a_2 \circ a_1(x)} h(z) \quad (x \in K_1).$$

Используя теорему 3.2 и теорему о минимаксе [12], имеем

$$q_h(x) = \sup_{z \in a_2(a_1(x))} h(z) = \sup_{y \in a_1(x)} \sup_{z \in a_2(y)} h(z) =$$

$$= \sup_{y \in a_1(x)} \inf_{g \in (a_2')^{-1}(h)} g(y) = \inf_{g \in (a_2')^{-1}(h)} \sup_{y \in a_1(x)} g(y) = \tag{4.2}$$

$$= \inf_{g \in (a_2')^{-1}(h)} \inf_{f \in (a_1')^{-1}(g)} f(x) = \inf_{f \in (a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)} f(x)$$

Из формулы (4.2) следует, что функционал q_h полунепрерывен сверху. Это и означает, что отображение $a_2 \circ a_1$ полунепрерывно сверху.

Перейдем к доказательству формулы (4.I). Если $h \in K_3'$, то множество $(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)$ выпукло и K_1' - устойчиво. Его замыкание (в X_1') -множество $\overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)}$ - также выпукло и K_1' - устойчиво. Кроме того, используя (4.2), имеем

$$\inf_{f \in \overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)}} f(x) = \inf_{f \in (a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)} f(x) = q_h(x) > -\infty .$$

Из сказанного следует,что множество $\overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)}$ является K_1 - опорным и (теорема I.2)

$$\overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)} = U_{q_h} .$$

С другой стороны,используя полунепрерывность сверху отображения $a_2 \circ a_1$, легко проверить, что

$$U_{q_h} = ((a_2 \circ a_1)')^{-1}(h)$$

и потому

$$((a_2 \circ a_1)')^{-1}(h) = \overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)} . \tag{4.3}$$

Рассмотрим отображение $\overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}}$ - замыкание отображения $(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}$ в пространстве $X_3' \times X_1'$. Непосредственно из определения замыкания и (4.3) вытекает, что для $h \in K_3'$

$$\overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}}(h) \supset \overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)} = ((a_2 \circ a_1)')^{-1}(h).$$

Снова используя определение замыкания и учитывая замкнутость отображения $((a_2 \circ a_1)')^{-1}$, получаем, что

$$((a_2 \circ a_1)')^{-1} = \overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}} ,$$

откуда, в свою очередь,следует,что

$$(a_2 \circ a_1)' = (\overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}})^{-1} .$$

Для завершения доказательства осталось сослаться на равенство

$$((\overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}})^{-1} = \overline{a_2' \circ a_1'} ,$$

справедливость которого проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Следствие I. Пусть отображения a_1 и a_2 удовлетворяют условиям теоремы и, кроме того, I) a_1' и a_2' полунепрерывны сверху; 2) для любого $f \in K_1'$ множества $a_1'(f)$ и $a_2' \circ a_1'(f)$ компактны (в X_2' и X_3' соответственно). Тогда

$$(a_2 \circ a_1)' = a_2' \circ a_1' .$$

В самом деле, из полунепрерывности сверху отображений a_1' и a_2' и компактности $a_1'(f)$ следует полунепрерывность сверху отображения $a_2' \circ a_1'$. Используя компактность множества $a_2' \circ a_1'(f)$, нетрудно проверить, что это множество нормально. Из следствия I к теореме 3.3 вытекает, что отображение $a_2' \circ a_1'$ замкнуто, откуда и следует наше утверждение.

Следствие 2. Если для любого $h \in K_3'$ множество $(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)$ замкнуто (в X_1'), то отображение $a_2' \circ a_1'$ замкнуто.

Это утверждение мгновенно вытекает из формулы (4.3).

Прежде чем привести еще одно следствие к теореме, дадим следующее определение. Пусть X_1 и X_2 – нормированные пространства, K_1 и K_2 – выпуклые замкнутые конусы в пространствах X_1 и X_2 соответственно. Положительно однородное отображение a конуса K_1 в $\Xi(K_2)$ назовем ограниченным, если

$$\sup_{x \in K_1,\ \|x\| \le 1} \ \sup_{y \in a(x)} \|y\| < \infty .$$

Следствие 3. (к теореме 4.I) .Пусть в условиях теоремы пространства X_i $(i = 1,2)$ банаховы, отображение a_1' ограничено (как отображение K_1^* в $\Xi(K_2^*)$). Тогда

$$(a_2 \circ a_1)' = a_2' \circ a_1' .$$

Чтобы показать справедливость этого следствия, достаточно проверить, что для любого $h \in K_3'$ множество $(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)$ замкнуто в X_1', а затем сослаться на следствие 2. Так как пространство X_1 банахово, то (см. [3] ,теорема 5, гл. IУ) множество $(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)$ будет слабо замкнутым, если слабо замкнуто каждое из множеств

$$(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h) \cap R S_1^* \qquad (R > 0), \qquad (4.4)$$

где S_1^* - единичный шар пространства X_1^*.

Замкнутость множеств (4.4) легко проверить, используя ограниченность отображения a_1'.

В связи со следствием 3 представляет интерес следующая

Л е м м а 4.4. Пусть X_1 и X_2 -нормированные пространства, K_1 и K_2 - выпуклые замкнутые конусы в пространствах X_1 и X_2 соответственно, причем пространство X_2 полное, а конус K_2 воспроизводящий.ж) Пусть, далее, a -вогнутое положительно одно - родное отображение конуса K_1 в $\Xi(K_2)$, обладающее тем свойством, что при некотором $\lambda > 0$

$$n a (S_1^+) \supset \lambda S_2^+$$

(где $S_i^+ = \{x \in K_i / \|x\| \leq 1\}$ $(i = 1, 2)$).

Тогда отображение a' ограничено (как отображение K_1^* в $\Xi(K_2^*)$)

Отметим еще справедливость следующего утверждения

Л е м м а 4.5. Пусть a_i - полунепрерывное сверху, нормальное отображение конуса K_i в Ξ (K_{i+1}) $(i = 1, 2)$, причем для любого x из K_1 множество $a_1(x)$ слабо компактно. Тогда отображение $a_2 \circ a_1$ усиленно нормально (и, следовательно, нормально и замкнуто).

Справедливость леммы легко следует из следующей ниже теоремы, которую мы приводим без доказательства

Т е о р е м а 4.2. Пусть $a_i \in A_v(K_i, K_{i+1})$ $(i = 1, 2)$ и, кроме того, для любого $f \in K_1'$ множество $a_1'(f)$ компактно в K_2'. Тогда $a_2 \circ a_1 \in A_v(K_1, K_3)$ и

$$(a_2 \circ a_1)' = a_2' \circ a_1'.$$

5°. В заключение рассмотрим аддитивные отображения, определенные на конусе в банаховом пространстве. Пусть X_i $(i = 1, 2)$ -банахово пространство, K_i - выпуклый, замкнутый, выступающий жж), воспроизводящий конус в пространстве X_i $(i = 1, 2)$. Отображение a конуса K_1 в $\Xi(K_2)$ назовем аддитивным, если

$$a(x_1 + x_2) = a(x_1) + a(x_2) \qquad (x_1, x_2 \in K_1).$$

Л е м м а 5.I. Если аддитивное отображение замкнуто, то оно положительно однородно.

С л е д с т в и е. Замкнутое аддитивное отображение является вогнутым.

ж)Конус K в векторном пространстве X называется воспроизводящим, если $K - K = X$.

жж) Конус K в векторном пространстве X называется выступающим если он не содержит ни одной прямой.

Пусть a – аддитивное, положительно однородное отображение конуса K_1 в $\Xi(K_2)$ и $g \in K_2^*$. Тогда функционал q_g, определенный на K_1 по формуле

$$q_g(x) = \sup_{y \in a(x)} g(y), \qquad (x \in K_1)$$

аддитивен, положительно однороден и ограничен. Из сказанного следует, что этот функционал может быть (единственным образом) продолжен до линейного функционала ℓ_g, заданного на всем пространстве X_1. Из непрерывности ℓ_g вытекает непрерывность (тем более полунепрерывность сверху) функционала q_g. Таким образом, отображение a полунепрерывно сверху. Как было отмечено при доказательстве теоремы 3.2, множество $(a')^{-1}(g)$ $(g \in K_2^*)$ совпадает с множеством $\mathcal{U}_{q_g}$ (всех опорных к q_g)
Нетрудно проверить, что $\mathcal{U}_{q_g} = \ell_g + K'$.
Таким образом

$$(a')^{-1}(g) = \ell_g + K_1' \qquad (g \in K_2'). \qquad (5.1)$$

Из (5.1) вытекает, что

$$a'(f) = \{g \in K_2' \mid \ell_g \in \langle 0, f \rangle\} \qquad (f \in K_1'),$$

где $\langle 0, f \rangle = (f - K_1') \cap K_1'$. Мы показали, таким образом, что справедлива следующая

Т е о р е м а 5.1. Аддитивное, положительно однородное, ограниченное отображение a является полунепрерывным сверху. При этом

$$(a')^{-1}(g) = \ell_g + K_1', \ (g \in K_2'); \quad a'(f) = \{g \in K_2' \mid \ell_g \in \langle 0, f \rangle\} \ (f \in K_1').$$

Отметим еще, что имеет место

Т е о р е м а 5.2. Пусть X_i – банахово пространство, K_i – выпуклый замкнутый выступающий воспроизводящий конус в пространстве X_i $(i = 1, 2, 3)$, a_i – аддитивное, положительно однородное, ограниченное отображение конуса K_i в $\Xi(K_{i+1})$, причем для любого $x \in K_1$ множество $a_1(x)$ слабо компактно. Тогда

$$(a_2 \circ a_1)' = a_2' \circ a_1'.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $h \in K_3'$ имеем, учитывая (5.1)

$$(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h) = \bigcup_{g \in (a_2')^{-1}(h)} (a_1')^{-1}(g) =$$

$$= \bigcup_{g \in \ell_h + K_2'} (\ell_g + K_1') = \ell_{\ell_h} + K_1'.$$

Таким образом, множество $(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)$ слабо замкнуто, откуда (следствие 2 к теореме 4.1) и вытекает справедливость теоремы.

З а м е ч а н и е . В условиях теоремы отображение $a_2 \circ a_1$ аддитивно.

Л и т е р а т у р а

1. А.М.Рубинов. Характеристика некоторых классов траекторий динамической модели производства. Настоящий сборник, стр.
2. А.М.Рубинов. Сублинейные функционалы, определенные на конусе. Сиб. мат. журнал (в печати).
3. R.T. Rockafellar. Monotone processes of convex and concave type. Memoirs of the Amer. Math. Soc; no 77, 1967
4. R.T.Rockafellar. A monotone convex analogue of linear algebra. Procedings of the Coll. on Convexity, Copenhagen, pp 261 -276,1967.
5. А.М.Рубинов. Двойственные модели производства. ДАН СССР, т.180, № 4, 1968.
6. А.М.Рубинов. Динамические модели производства с переменной технологией. В сб. "Труды первой зимней школы по математическому программированию" вып.3, Москва, 1969.
7. Н.Бурбаки. Топологические векторные пространства, ИЛ, 1959.
8. L.Hörmander. Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans une espace localement convexe. Arkiv för Matematik, B3, H.2, 1955.
9. К.Берж. Общая теория игр нескольких лиц, Физматгиз, 1961.
10. Д.А.Райков. Векторные пространства. Физматгиз, 1962 г.
11. А.Г.Пинскер. Пространство выпуклых множеств локально выпуклого пространства. В сб. "Некоторые классы полуупорядоченных пространств". Издательство ЛГУ, 1966.
12. Дж.Э.Л.Пек и А.А.Далмидж. Игры на компактном множестве. В сб. "Бесконечные антогонистические игры". Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
19.УI. 1969 г.