УДК 513+516+ 513.88:513.83 (07)

# ЗАДАЧИ ТИПА ИЗОПЕРИМЕТРА В ПРОСТРАНСТВЕ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

С.С.Кутателадзе , А.М.Рубинов

<u>Введение</u> В работе делается попытка с точек зрения функционального анализа и математического программирования рассмотреть некоторые экстремальные задачи в теории выпуклых поверхностей, группирующиеся вокруг классической проблемы изопериметра.

Методы математического программирования пригодны для исследования экстремальных задач в векторных пространствах. В связи с этим в первом параграфе известным способом вводится пространство выпуклых компактов, в котором и ведется дальнейшее исследование.

В параграфе 2 в нужной нам краткой форме приводятся основные положения теории смешанных объемов Брунна-Минковского и теории поверхностных функций Александрова.

В третьем параграфе описываются некоторые нужные для дальнейшего свойства поляры конуса сублинейных функций.

Параграф 4 посвящен экстремальным задачам в классе регулярных выпуклых поверхностей, в которых максимизируемая функция и ограничения задаются смешанными объемами.

Параграфы 5 и 6 посвящены задаче максимизации объема при общих линейных ограничениях.

Мы, как правило, используем терминологию работ Н.Бурбаки [1] и А.Д.Александрова [2]. Знак $\triangleq$ означает "по определению".

§ 1. При изучении выпуклых множеств и связанных с ними экстремальных задач важную роль играют суперлинейные (сублинейные) функционалы.

Непрерывный функционал $p$ , заданный на выпуклом замкнутом конусе $K$ в локально выпуклом пространстве $X$ называется суперлинейным, если

1. $p(x+y) \geqslant p(x)+p(y) \qquad (x, y \in K);$

2. $p(\alpha x) = \alpha p(x) \qquad (\alpha \geqslant 0, \ x \in K).$

Отметим сразу же, что любая положительная степень неотрицатель - ного суперлинейного функционала квазивогнута [3] .

Будем говорить, что линейный функционал $h$ лежит в надграфике суперлинейного функционала $p$ ($h \in U_p$) , если $h(x) \geqslant p(x)$ для всех $x \in K$ . В работе [4] Л.Хермандер фактически доказал , что имеет место следующая

Т е о р е м а 1.1. Если $p$ - суперлинейный функционал, определенный на конусе $K$ , то

$$p(x) = \inf_{h \in U_p} h(x) \qquad (x \in K).$$

Особый интерес представляет случай, когда $K = X$ . В этой ситуации для произвольного суперлинейного функционала $p$ множество $U_p$ является выпуклым компактом в ослабленной топологии $\sigma(X^*, X)$, где $X^*$ - пространство, сопряженное к $X$ . Имеет место и обратное утверждение, т.е. каждый выпуклый компакт $U$ в ослабленной топологии пространства $X^*$ порождает суперлинейный функционал $p_U$ по формуле $p_U(x) \triangleq \min_{h \in U} h(-x) \ (x \in X)$ ( теорема Минковского-Фенхеля). Функционал $-p_U$ называется опорной функцией $U$ .

Функционал $q$ , заданный на конусе $K$ локально выпуклого пространства $X$ ,называется сублинейным, если $-q$ суперлинеен . Изложенное выше mutatis mutandis переносится на случай суб - линейных функционалов.

Пусть теперь $R^n$ есть $n$ - мерное арифметическое прост - ранство, состоящее из наборов $x = (\overset{(1)}{x}, \overset{(2)}{x}, \ldots, \overset{(n)}{x})$ . Положим $R^n_+ \triangleq \{x \in R^n : \overset{(i)}{x} \geqslant 0;\ i=1,2,\ldots,n\}$ - конус векторов с неотрицательными компонентами; $Z_n \triangleq \{x \in R^n : |x| \triangleq (\sum_{i=1}^{n} \overset{(i)}{x}{}^2)^{1/2} = 1\}$ - сфера направлений; $\gamma_n \triangleq \{x \in R^n : |x| \leqslant 1\}$ - единичный шар; $e_{-i} \triangleq -e_i$ ; $e_i \triangleq (\underbrace{0,\ldots,0,1}_{i},0,\ldots,0)\ (i=1,2,\ldots,n)$ -орты, которые в дальнейшем иногда рассматриваются как выпуклые компакты. Определим при помощи единичной массы, расположенной в точке $z$ , меру (заряд ) $\varepsilon_z$ для каждого $z \in Z_n$ [1] .

Пусть $W_n$ - совокупность выпуклых компактных подмножеств пространства $R^n$ . С помощью операций Минковского ( сложение множеств и умножение на неотрицательный скаляр )введем в $W_n$ структуру полугруппы с операторами из $R_+$ . Упорядочим $W_n$ по включению. Нам необходимо иметь нормированное пространство, в котором $W_n$ есть с точностью до изоморфизма воспроизводящей выпуклый замкнутый конус. С этой целью отождествим каждый выпуклый компакт со своей опорной функцией. Из теоремы Минковского-Фенхеля следует, что полученное отображение есть изоморфизм полугруппы с операторами $W_n$ и конуса сублинейных функционалов над $R^n$, за которым мы сохраним символ $W_n$. В дальнейшем будем обозначать выпуклый компакт и его опорную функцию одной буквой.

Рассмотрим теперь векторное пространство разностей сублинейных функционалов $S_n \triangleq W_n - W_n$, порожденное $W_n$. Введем в $S_n$ отношение порядка с помощью конуса $S_n^+ \triangleq \{s \in S_n : s(z) \geqslant 0 \ \forall z \in Z_n\}$. Это пространство изучалось в [5,6], где было показано, что если в качестве единицы взять шар $\gamma_n$ (евклидову норму), то $S_n$ превращается в К-линеал ограниченных элементов [7]. Введем в нем стандартным образом норму, положив

$$\|s\| \triangleq \sup_{x \in R^n} \frac{|s(x)|}{|x|} \qquad (s \in S_n).$$

В исходном конусе $W_n$ эта норма порождает сходимость, совпадающую со сходимостью выпуклых множеств в смысле замкнутого предела Хаусдорфа [8,9].

По теореме Крейнов-Какутани [7] найдется такой компакт $Q$, что $S_n$ как векторное упорядоченное пространство изоморфно некоторой всюду плотной подструктуре нормированного упорядоченного пространства $C(Q)$ - непрерывных на $Q$ функций с чебышевской нормой. Используя способ построения компакта $Q$, нетрудно проверить, что $Q$ совпадает со сферой направлений $Z_n$. Приведенное утверждение содержит известный в геометрии факт - любая непрерывная на сфере функция может быть равномерно приближена линейными комбинациями следов опорных функций на $Z_n$ (иными словами, факт изобильности $W_n$ в $C(Z_n)$ [I] ).

Замечание. Если норма в $R^n$ задавалась калибровочной функцией симметричного выпуклого телесного компакта $W$, то, как и раньше, теорема Крейнов-Какутани приведет к изобильности $W_n$ в $C(\partial W)$, где $\partial W$ - граница $W$.*)

Так как $W_n$ изобильно в $C(Z_n)$, то легко выписать общий вид линейного функционала в линейном нормированном пространстве $S_n$. В самом деле, $S_n^*$ совпадает с $C^*(Z_n)$, т.е. по теореме Маркова-Рисса с точностью до изоморфизма есть пространство мер на сфере направлений. Таким образом, ограничение линейного функционала $f$

*) Здесь, как и выше, $x \in W_n$ и след $x/_{\partial W}$, конечно, отождествлены.

нет $S_n$ на $W_n$, иными словами, линейный по Минковскому функционал над выпуклыми компактами имеет вид $F(x)=\int_{Z_n} x(z)\,d\mu(z)$, где $\mu$ – некоторая мера на сфере направлений. Это утверждение фактически содержится в работе А.Д.Александрова [2]. Теорема о представлении оказывается полезной при рассмотрении некоторых свойств линейных по Минковскому функционалов.

Пример I.I. Линейный по Минковскому, инвариантный относительно вращений функционал $F$ над выпуклыми компактами есть с точностью до множителя интегральная ширина ( так называемая норма выпуклого компакта , ср. [10] ).

Доказательство. Пусть $\varphi$ –произвольный поворот, тогда условие инвариантности примет вид $F(x)=F(\varphi x)$ для всякого $x\in W_n$ ; иными словами ,

$$\int_{Z_n} x(z)\,d\mu(z)=\int_{Z_n}\varphi x(z)\,d\mu(z),$$

что, очевидно, ведет к равенству

$$\int_{Z_n} x(z)\,d\mu(z)=\int_{Z_n} x(z)\,d\mu(\varphi z) \tag{I}$$

для всякого $x\in W_n$ и любого поворота $\varphi$ . Так как $W_n$ изобильно в $C(Z_n)$, то из (I) следует, что, с точностью до множителя, $\mu$ есть лебегова мера на сфере – $mes$. Таким образом, с точностью до множителя,

$$F(x)=\int_{Z_n} x(z)\,d\mu(z)=\int_{Z_n} x(z)\,d\,mes(z)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{Z_n}[x(z)+x(-z)]\,d\,mes(z)=\frac{1}{2}\int_{Z_n} b(x,z)\,d\,mes(z)\,;$$

здесь и в дальнейшем $b(x,z)$ – ширина $x$ в направлении $z$ .

§ 2. Этот параграф носит в основном вспомогательный характер. Приведем сначала несколько определений.

Телесный выпуклый компакт называется выпуклым телом. Регулярным телом, как обычно, назовем строго выпуклое гладкое тело. Обозначим через $WO_n$ , $WR_n$ соответственно конусы выпуклых тел и регулярных тел.

Будем говорить, что выпуклый компакт $x$ " $T$ –входит " в выпуклый компакт $y$ (символическая запись $x\leq_T y$ ), если некоторая трансляция (сдвиг ) $x$ содержится в $y$ , т.е. если $\exists u\in R^n$: $x+u\subset y$ . Пишут $x=_T y$ и говорят, что $x$ " $T$ – равен " $y$, если одновременно $x\leq_T y$ и $y\leq_T x$ . Очевидно, что $=_T$ является отношением эквивалентности. Через $TW_n$ обозначим фактор-множество конуса $W_n$ по этой эквивалентности ( необычное обозначение объясняется тем, что $R^n$ со структурой, индуцированной $S_n$, к сожалению, не является полосой [I] ).

Напомним [2,8, 9] ,что смешанный объем $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в $W_n$ есть неотрицательная, монотонная по каждому аргументу, симметричная, полилинейная ( по Минковскому) форма $V: W_n^n \to R_+$. Известно, что многие характеристики выпуклых тел представимы смешанными объемами, например: объем тела $x$ есть $V(x) = V(x, x, \ldots, x)$; площадь поверхности $S(x) = n V(x, x, \ldots, x, \gamma_n)$.

По теореме об общем виде линейного по Минковскому функционала найдется такая мера $\mu(x_1, \ldots, x_{n-1})$, что для любого $y \in W_n$ выполняется равенство

$$V(y, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \frac{1}{n} \int_{Z_n} y(z)\, d\mu(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})(z).$$

Как известно [2] , $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ совпадает со смешанной поверхностной функцией тел $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. В частности, $\mu(x, x, \ldots, x) \triangleq \mu(x)$ -поверхностная функция тела $x \in W_n$. Нетрудно проверить, что отображение $\mu: (x_1, \ldots, x_{n-1}) \to \mu(x_1, \ldots, x_{n-1})$ есть неотрицательный, симметричный, полилинейный ( по Минковскому) оператор из $W_n^{n-1}$ в $C^*(Z_n)$.*)

Ввиду изобильности $W_n$ в $C(Z_n)$ можно показать, что отображения $V$ и $\mu$ допускают непрерывные распространения с сохранением свойств на пространства $C^n(Z_n)$ и $C^{n-1}(Z_n)$ соответственно, причем для $f, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1} \in C(Z_n)$ имеем

$$V(f, f_1, \ldots, f_{n-1}) = \frac{1}{n} \int_{Z_n} f(z)\, d\mu(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})(z).$$

Здесь и в дальнейшем под $V$ , $\mu$ всегда понимаются распространения соответствующих отображений.

Нам потребуются следующие обозначения:

$$V_{m,k}(\alpha, x, \mathcal{L}) \triangleq V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-m}, \underbrace{x, \ldots, x}_{m-k}, \underbrace{\mathcal{L}, \ldots, \mathcal{L}}_{k});$$

$$V_m(\alpha, \mathcal{L}) \triangleq V(\alpha, \ldots, \alpha, \underbrace{\mathcal{L}, \ldots, \mathcal{L}}_{m});$$

$$\mu_{m,k}(\alpha, x, \mathcal{L}) \triangleq \mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-m}, \underbrace{x, \ldots, x}_{m-k-1}, \underbrace{\mathcal{L}, \ldots, \mathcal{L}}_{k});$$

$$\mu_m(\alpha, \mathcal{L}) \triangleq \mu(\alpha, \ldots, \alpha, \underbrace{\mathcal{L}, \ldots, \mathcal{L}}_{m});$$

здесь $0 \le k \le m \le n$ . Таким образом, $V_{m,k}(\alpha, x, \mathcal{L}) = \frac{1}{n} \int_{Z_n} x(z)\, d\mu_{m,k}(\alpha, x, \mathcal{L})$

---

*) Говоря о непрерывности оператора $\mu$ , мы имеем в виду широкую топологию в пространстве $C^*(Z_n)$ [I,9] .

Основная теорема Брунна-Минковского утверждает, что функционал $G(x) \triangleq V_{m,k}^{\frac{1}{m-k}}(\mathfrak{A}, x, \mathcal{L})$, определенный на конусе $\mathcal{W}_n$ пространства $S_n$, -суперлинеен. Нам потребуется в дальнейшем производная (по направлениям) этого функционала. Для её вычисления прежде всего заметим, что в силу симметричности и полилинейности $V$ справедливо соотношение

$$
\begin{aligned}
& V(l_1, \ldots, l_{n-m}, f+\alpha g, \ldots, f+\alpha g, h_1, \ldots, h_k) = \\
& = V(l_1, \ldots, l_{n-m}, f, \ldots, f, h_1, \ldots, h_k) + \\
& + \alpha(m-k) V(g, l_1, \ldots, l_{n-m}, f, \ldots, f, h_1, \ldots, h_k) + o(\alpha); \\
& (f, g, l_1, \ldots, l_{n-m}, h_1, \ldots, h_k \in C(Z_n); \quad \alpha \in R).
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что

$$
\begin{aligned}
(V_{m,k})'_f(g) \triangleq \lim_{\alpha \to +0} \frac{V_{m,k}(l, f+\alpha g, h) - V_{m,k}(l, f, h)}{\alpha} = \\
= (m-k) V(g, l_1, \ldots, l_{n-m}, f, \ldots, f, h, \ldots, h).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Очевидно, что производная $(V_{m,k})'_f$ является линейным функционалом, т.е. градиентом (Гато). Теперь легко видеть, что если $x \in \mathcal{W}_n$ и элемент $g$ пространства $C(Z_n)$ таковы, что $G(x) \neq 0$ и $x+\alpha g \in \mathcal{W}_n$ при достаточно малых $\alpha > 0$, то

$$
G'_x(g) = \frac{V(g, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{n-m}, x, \ldots, x, \mathcal{L}, \ldots, \mathcal{L})}{V_{m,k}^{\frac{m-k-1}{m-k}}(\mathfrak{A}, x, \mathcal{L})}. \tag{3}
$$

Функционал, стоящий в правой части (3), определен на всем пространстве и, следовательно (ср. теорему I.I), лежит в надграфике суперлинейного функционала $G$. Таким образом, для любых $x, y, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{n-m}, \mathcal{L} \in \mathcal{W}_n$ справедливо соотношение

$$
V_{m,k}^{\frac{1}{m-k}}(\mathfrak{A}, x, \mathcal{L}) \leq \frac{V(x, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{n-m}, y, \ldots, y, \mathcal{L}, \ldots, \mathcal{L})}{V_{m,k}^{\frac{m-k-1}{m-k}}(\mathfrak{A}, y, \mathcal{L})};
$$

откуда вытекает неравенство Александрова [2]:

$$
V_{m,k}(\mathfrak{A}, x, \mathcal{L}) V_{m,k}^{m-k-1}(\mathfrak{A}, y, \mathcal{L}) \leq V^{m-k}(x, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{n-m}, y, \ldots, y, \mathcal{L}, \ldots, \mathcal{L}).
$$

Ниже нам неоднократно понадобится теорема Александрова о восстановлении выпуклого тела по его поверхностной функции. Прежде чем формулировать результат, дадим определение.

Меру $\mu \in C^*(Z_n)$ назовем александровской ($\mu \in A_n$), если

I. $\mu$ - неотрицательна ($\mu \in C^*_+(Z_n)$);

2. $\mu$ - инвариантна относительно сдвигов ($\mu \in TC^*(Z_n)$), т.е. $\int_{Z_n} z^{(i)} d\mu = 0$ для $i=1,2,\ldots,n$. (Это свойство означает,

что определяемый мерой $\mu$, линейный по Минковскому функционал одинаково действует на "Т-равные" выпуклые компакты );

3. $\mu(Z_n \cap H) < \mu(Z_n)$ для всякого гиперподпространства $H$.

**Теорема 2.1** (А.Д.Александров [2,9]). Поверхностная функция любого выпуклого тела есть александровская мера. Для каждой александровской меры найдется единственное с точностью до сдвига ( до "Т-равенства") выпуклое тело, имеющее эту меру своей поверхностной функцией.

Из этой теоремы и из свойств оператора $\mu$ следует, в частности, что для плоскости имеет место изоморфизм между $TC^*(Z_2) \cap \cap C^*_+(Z_2)$ и $TW_2$ в смысле сохранения конической структуры.

§ 3. В этом параграфе мы займемся описанием $W_n^*$ - конуса,сопряженного к $W_n$ (в пространстве $C^*(Z_n)$), т.е.

$$W_n^* \triangleq \{f \in C^*(Z_n) : f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in W_n\}.$$

Введем следующее определение: $x \underset{T}{\leqslant} y$ $(x, y \in W_n)$ ($x$ -" Т -предшествует " $y$ ), если для всякого $z \in W_n$ выполняется неравенство $V_1(x, z) \leqslant V_1(y, z)$.

Отметим следующие очевидные свойства:

1. $(x \underset{T}{\leqslant} y$ и $y \underset{T}{\leqslant} x) \Longrightarrow x \underset{T}{=} y$ (здесь $x, y \in WO_n$);

2. $x \underset{T}{\subseteq} y \Longrightarrow x \underset{T}{\leqslant} y$.

К сожалению, в общем случае обратное к 2 утверждение неверно. В самом деле, пусть $n > 2$ и $\alpha > 1$ ,тогда $\alpha \gamma_{n-2} \underset{T}{\leqslant} \gamma_n$ , хотя в смысле предпорядка $\underset{T}{\subseteq}$ эти множества несравнимы.

Конус $W_n^*$ легко описать в терминах отношения " Т - предшествования". Именно имеет место

**Теорема 3.1.**

$$W_n^* = \{\mu \in C^*(Z_n) : \mu = \mu(x) - \mu(y);\ x \underset{T}{\geqslant} y;\ x, y \in W_n\}.$$

**Доказательство.** Пусть сначала $\mu = \mu(x) - \mu(y)$, где $x, y \in W_n$ и $x \underset{T}{\geqslant} y$ , тогда

$$\int_{Z_n} z\, d\mu = n(V_1(x, z) - V_1(y, z)) \geq 0, \text{ т.е. } \mu \in W_n^*.$$

Пусть теперь $\mu \in W_n^*$ . Заметим прежде всего, что так как $e_i, e_{-i} \in W_n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то $\mu \in TC^*(Z_n)$. Отсюда следует,что $\int_{Z_n} \overset{(i)}{z}\, d\mu^+ = \int_{Z_n} \overset{(i)}{z}\, d\mu^- \triangleq \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, здесь $\mu^+$, $\mu^-$ - соответственно положительная и отрицательная части меры $\mu$ .Определим теперь следующие меры:

$$\mu_1 \triangleq \mu' + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^+ \varepsilon_{\ell_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^- \varepsilon_{\ell_i} + mes ;$$

$$\mu_2 \triangleq \mu' + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^+ \varepsilon_{\ell_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^- \varepsilon_{\ell_i} + mes ,$$

где $\alpha_i^+$, $\alpha_i^-$ – соответственно положительная и отрицательная части $\alpha_i$ $(i=1,2,\dots,n)$, а $mes = \mu(\gamma_n)$ – лебегова мера на $Z_n$. Очевидно, что $\mu = \mu_1 - \mu_2$ и, кроме того, $\mu_1, \mu_2 \in A_n$. Пусть $x, y \in W_n$ таковы, что $\mu_1 = \mu(x)$ и $\mu_2 = \mu(y)$. Так как $\mu \in W_n^*$, то $x \underset{T}{\geq} y$. Теорема доказана.

Приведем одно любопытное следствие этой теоремы. Сначала дадим определение.

Будем говорить, что система $n$-мерных векторов $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ обладает свойством $M$, если ранг этой системы равен $n$, среди векторов $x_1, x_2, \dots, x_p$ нет нулевых, никакие два из них не лежат на одном луче, исходящем из нуля, и, кроме того, $\sum_{i=1}^{p} x_i = 0$. Из теоремы Александрова следует, что для любой системы векторов $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$, обладающей свойством $M$, найдется выпуклый многогранник $P\{x_1, \dots, x_p\}$, $(n-1)$-мерные грани которого имеют внешние нормали $x_1, x_2, \dots, x_p$ и площади $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|$ соответственно. Справедлива следующая

Т е о р е м а 3.2. Пусть $\{x_1, \dots, x_p\}$ и $\{y_1, \dots, y_q\}$ – две системы $n$-мерных векторов, обладающих свойством $M$, тогда неравенство

$$h(x_1) + h(x_2) + \dots + h(x_p) \geq h(y_1) + h(y_2) + \dots + h(y_q)$$

справедливо для любой сублинейной функции $h \in W_n$ в том и только в том случае, если $P\{x_1, \dots, x_p\} \underset{T}{\geq} P\{y_1, \dots, y_q\}$.

В случае плоскости приведенные предложения существенно упрощаются, так как справедлива

Т е о р е м а 3.3. Пусть $x, y \in W_2$, тогда $x \underset{T}{\leq} y \Longleftrightarrow x \underset{T}{\leq} y$

Эта теорема является простым следствием следующего утверждения:

**П р е д л о ж е н и е 3.1. Пусть $f \in C(Z_n)$ такова, что для любой неотрицательной, инвариантной относительно сдвигов меры $\mu \in C^*(Z_n)$ выполняется неравенство: $\int_{Z_n} f(z)\, d\mu(z) \geq 0$; тогда найдется** вектор $c \in R^n$, такой что $f(z) \geq (c, z)$ $(z \in Z_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_s$ – произвольные векторы из $R^n$ и $x_0 \triangleq -\sum_{p=1}^{s} x_p$. Пусть, кроме того $I \triangleq \{p \in \{0, 1, \dots, s\} : x_p \neq 0\}$. Образуем следующую меру $\tilde{\mu} \in C^*(Z_n)$:

$$\tilde{\mu} \triangleq \sum_{p\in J} |x_p|\, \varepsilon_{\frac{x_p}{|x_p|}} .$$

Легко видеть, что $\tilde{\mu}$ неотрицательна и инвариантна относительно сдвигов. Следовательно, имеем

$$\sum_{p\in J} |x_p|\, f\left(\frac{x_p}{|x_p|}\right) \geq 0 . \qquad (4)$$

Определим теперь функцию $\bar{f} : R^n \to R$ соотношениями: $\bar{f}(0) \triangleq 0$ и $\bar{f}(x) \triangleq |x|\, f\left(\frac{x}{|x|}\right)$ для $x \neq 0$, тогда из (4) получим:

$$\text{1. } \bar{f}(\alpha x) = \alpha \bar{f}(x) \qquad (\alpha \geq 0;\ x \in R^n);$$

$$\text{2. } \sum_{p=1}^{s} \bar{f}(x_p) + \bar{f}\left(-\sum_{p=1}^{s} x_p\right) \geq 0 \quad (x_1, \ldots, x_p \in R^n). \qquad (5)$$

Пусть теперь $\det \bar{f}$ – надграфик функции $\bar{f}$, т.е. $\det \bar{f} \triangleq \{z = (x,t) \in R^n \times R : t \geq \bar{f}(x)\}$. Очевидно, что $\det \bar{f}$ – замкнутый телесный конус. Пусть $N$ – выпуклая оболочка $\det \bar{f}$. Ясно, что

$$N = \left\{z = \sum_{p=1}^{s} \alpha_p z_p ;\ \alpha_p \geq 0;\ z_p \in \det \bar{f};\ (p = 1, \ldots, s)\right\} .$$

В силу (5), луч $M \triangleq \{z = (0,t) \in R^n \times R : t < 0\}$ не пересекается с $N$. Отсюда, по теореме отделимости Эйдельгайта, существует невертикальная гиперплоскость $H$, разделяющая $N$ и $M$. Функционал $c \in R^n$, графиком которого служит $H$, искомый.

Пусть теперь $\bar{x} \in \mathcal{W}_n$, определим конус допустимых направлений в точке $\bar{x}$ соотношением:

$$\mathcal{W}_{n,\bar{x}} \triangleq \{ g \in C(Z_n) : \exists \alpha_0 > 0 : \bar{x} + \alpha g \in \mathcal{W}_n \ (\alpha \in [0, \alpha_0])\} .$$

Отметим, что $\mathcal{W}_{n,0} = \mathcal{W}_n$. Из предыдущих теорем легко вытекают первые два утверждения следующей теоремы:

Т е о р е м а 3.4.

1. $\mathcal{W}^*_{2,\bar{x}} = \{\mu \in C^*(Z_2) : \mu = \mu(x) - \mu(y);\ x \underset{T}{\geq} y,\ V(x, \bar{x}) = V(y, \bar{x})\}$.

2. $\mathcal{W}^*_{n,\bar{x}} = \{\mu \in C^*(Z_n) : \mu = \mu(x) - \mu(y);\ x \underset{T}{\geq} y,\ V_1(x, \bar{x}) = V_1(y, \bar{x})\}$.

3. Если $\bar{x}$ – регулярное тело, то $\mathcal{W}^*_{n,\bar{x}} = 0$.

Последнее утверждение вытекает из следующего.

П р е д л о ж е н и е 3.2. Конус регулярных тел $\mathcal{W}R_n$ относительно телесен (в сильнейшей локально выпуклой топологии пространства $C(Z_n)$).

Доказательство: В самом деле, достаточно проверить, что для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{W}R_n$ при некотором $\gamma > 0$ функция $t(z) = x_1(z) - \gamma x_2(z)$ выпукла, т.е. что квадратичная форма $(T(z_0)z, z)$, где $T(z_0)$ - матрица вторых частных производных функции $t$ в точке $z_0 \in R^n$ ( $z_0 \neq 0$ ), положительно полуопределена.

Пусть $(X_1(z_0)z, z)$; $(X_2(z_0)z, z)$ - аналогичные квадратичные формы для функций $x_1$ и $x_2$ соответственно, а

$$(X_1^\varepsilon(z_0)z, z) \triangleq (X_1(z_0)z, z) + \varepsilon(z, z),$$

тогда $(X_1^\varepsilon(z_0)z, z)$ положительно определена для всякого $\varepsilon > 0$. Приводя регулярный пучок форм к каноническому виду [11], получим в координатах ( $\xi$ ):

$$(X_1^\varepsilon(z_0)z, z) - \gamma(X_2(z_0)z, z) = \sum_{i=1}^{n-1} (1 - R_i\gamma)\xi_i^2 + \xi_n^2 ;$$

здесь $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ - главные радиусы кривизны $\partial x_2$ в точке (см.[9]):

$$\left( \frac{\partial x_2}{\partial z^1}(z_0), \dots, \frac{\partial x_2}{\partial z^n}(z_0) \right)$$

Выбирая $\gamma > 0$ так, чтобы $1 - R_i\gamma \geq 0$ равномерно по $z_0$, $i$, что возможно в силу регулярности $x_2$, и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим требуемое.

§ 4. Здесь мы будем рассматривать экстремальные задачи над выпуклыми телами, в которых ограничения и целевая функция задаются смешанными объемами. Сразу же оговоримся, что вопрос существования решения нас не будет интересовать, т.к. обычно соответствующий результат может быть известным способом извлечен из теоремы выбора Бляшке [10]. Итак,

Задача 4.1. Заданы:

тела $\mathfrak{A}_1^i, \dots, \mathfrak{A}_{n-m_i}^i$ ; $\mathcal{L}^i$ $(i = 0, 1, \dots, s)$ ;

числа $b_1, \dots, b_s \in R_+$ .

Ищется $x \in \mathcal{W}_n$, удовлетворяющий условиям:

1. $V_{m_i, k_i}(\mathfrak{A}^i, x, \mathcal{L}^i) \leq b_i$ $(i = 1, 2, \dots, s)$ ;
2. $V_{m_0, k_0}(\mathfrak{A}^0, x, \mathcal{L}^0)$ - достигает максимума.

К сожалению, эта задача в общем случае не является задачей квазивогнутого программирования, т.к. ограничения § 1 задают дополнения к выпуклым множествам.

Для анализа задачи 4.1 нам потребуется следующее, основанное на схеме А.Я.Дубовицкого и А.А.Милютина [12],

Предложение 4.1. Пусть $X$ - локально выпуклое пространство, $K$ - выпуклый замкнутый конус в пространстве $X$, $G_0, G_1, \dots, G_s$ - функционалы, определенные и дифференцируемые (по Гато) в некоторой окрестности $U$ точки $\bar{x} \in X$, причем

$(G_i)'_{\bar x}(\bar x)>0\ (i=0,1,\dots,s)$ (условие Слейтера). Пусть, кроме того, в точке $\bar x$ функционал $G_0$ достигает максимума на множестве

$$\Omega \triangleq K\cap\bigcap_{i=1}^{s}\{x\in U: G_i(x)\leq b_i\}$$

Положим еще

$$K_{\bar x}\triangleq\{u\in X:\exists\alpha_0>0:\ \bar x+\alpha u\in K;\ 0\leq\alpha\leq\alpha_0\},$$

тогда найдется функционал $\bar f\in K^*_{\bar x}$ и числа $\bar\alpha_1,\dots,\bar\alpha_s\in R_+$, такие что

$$(G_0)'_{\bar x}+\bar f=\sum_{i=1}^{s}\bar\alpha_i(G_i)'_{\bar x}\quad.$$

Доказательство. Положим

$$K_0\triangleq\{u\in X:(G_0)'_{\bar x}(u)>0\};\quad K_i\triangleq\{u\in X:(G_i)'_{\bar x}(u)<0\}\ (i=1,2,\dots,s).$$

Покажем, что

$$\Big(\bigcap_{i=0}^{s}K_i\Big)\cap K_{\bar x}=\phi\ .$$

Действительно, допустим противное, и пусть $u\in K_{\bar x}$ и $u\in K_i$ $(i=0,1,\dots,s)$, тогда, так как $u\in K_i$ $(i=1,2,\dots,s)$, то при достаточно малых $\alpha$:

$$G_i(\bar x+\alpha u)-b_i=(G_i(\bar x+\alpha u)-G_i(\bar x))+(G_i(\bar x)-b_i)\leq$$

$$\leq G_i(\bar x+\alpha u)-G_i(\bar x)=\alpha(G_i)'_{\bar x}(u)+o(\alpha)<0\ .$$

Таким образом, $\bar x+\alpha u\in\{x\in U: G_i(x)\leq b_i\}$ $(i=1,2,\dots,s)$, кроме того, т.к. $u\in K_{\bar x}$, то $\bar x+\alpha u\in K$. Итак, $\bar x+\alpha u\in\Omega$. С другой стороны, поскольку $u\in K_0$ и в точке $\bar x$ достигается максимум, то

$$G_0(\bar x+\alpha u)-G_0(\bar x)=\alpha(G_0)'_{\bar x}(u)+o(\alpha)\leq 0\ ,$$

откуда следует, что $(G_0')_{\bar x}(u)\leq 0$ – противоречие.

Рассмотрим теперь в пространстве $X^{s+1}$ конусы $K'\triangleq K_{\bar x}\times K_1\times\dots\times K_s$ и $K''\triangleq K_0^{s+1}$. Конусы $K'$ и $K''$ выпуклы, не пересекаются по доказанному выше, причем конус $K''$ телесен. Следовательно, применив теорему отделимости Эйдельгайта, найдем ненулевой функционал $\ell\triangleq(\ell_{\bar x},\ell_1,\dots,\ell_s)\in(X^{s+1})^*$ такой, что $\ell(z)\geq 0$ $(z\in K')$ и $\ell(z)<0$ $(z\in K'')$. Последнее означает, что

$$\ell_{\bar x}(u_{\bar x})+\ell_1(u_1)+\dots+\ell_s(u_s)\geq 0\quad(u_{\bar x}\in K_{\bar x};\ u_i\in K_i;\ i=1,2,\dots,s);$$

$$\ell_{\bar x}(v_0)+\ell_1(v_1)+\dots+\ell_s(v_s)<0\quad(v_0,v_1,\dots,v_s\in K_0)\ .$$

Зафиксируем $u_{\bar x}\in K_{\bar x}$ и, устремив $u_i$ $(i=1,\dots,s)$ к нулю, получим, что $\ell_{\bar x}(u_{\bar x})\geq 0$ $(u_{\bar x}\in K_{\bar x})$. Таким же способом проверяется, что $\ell_i(u_i)\geq 0$ $(u_i\in K_i;\ i=1,2,\dots,s)$.

Полагая $v_0 = v_1 = \ldots = v_s \triangleq v$, получим, что

$$\ell_0(v) \triangleq (\ell_{\bar{x}} + \sum_{i=1}^{s} \ell_i)(v) < 0 \quad (v \in K_0).$$

Итак, мы показали, что

$$\ell_{\bar{x}} \in K^*_{\bar{x}}\ ;\ \ell_i \in K^*_i\ \ (i=1,2,\ldots,s),\ \ell_0 \in -(K^*_0). \qquad (6)$$

По условию функционалы $G_0, G_1, \ldots, G_s$ дифференцируемы по Гато, т.е. конус $K_i\ (i=0,1,\ldots,s)$ является полупространством, но тогда

$$K_i^* = \{\alpha (G_i)'_{\bar{x}}\}_{\alpha \le 0}\ (i=1,2,\ldots,s);\ K_0^* = \{\alpha (G_0)'_{\bar{x}}\}_{\alpha \ge 0}\,. \qquad (7)$$

Из (6) и (7) теперь следует, что найдутся такие $\beta_i \le 0$ $(i=0,1,\ldots,s)$, что $\ell_i = \beta_i (G_i)'_{\bar{x}}\ (i=1,2,\ldots,s)$ и $\ell_0 = -\beta_0 (G_0)'_{\bar{x}}$. Итак, мы получили, что

$$-\beta_0 (G_0)'_{\bar{x}} = \ell_{\bar{x}} + \sum_{i=1}^{s} \beta_i (G_i)'_{\bar{x}}\,. \qquad (8)$$

Если $\beta_i = 0\ (i=1,2,\ldots,s)$, то $\ell_{\bar{x}} \neq 0$, поскольку $\ell \neq 0$. С другой стороны, в этом случае $-\beta_0 (G_0)'_{\bar{x}}(\bar{x}) = \ell_{\bar{x}}(\bar{x})$, но т.к. $\bar{x} \in K_{\bar{x}}$ и $-\bar{x} \in K_{\bar{x}}$, то $\ell_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$, т.е. и $\beta_0 = 0$, ибо по условию $(G_0)'_{\bar{x}}(\bar{x}) \neq 0$. Из (8) следует, что в этом случае $\ell_{\bar{x}} = 0$ – противоречие, следовательно, не все $\beta_i\ (i=1,2,\ldots,s)$ равны нулю. Теперь осталось заметить, что так как

$$-\beta_0 (G_0)'_{\bar{x}}(\bar{x}) = \ell_{\bar{x}}(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{s} \beta_i (G_i)'_{\bar{x}}(\bar{x}) \neq 0\,,$$

то $\beta_0 \neq 0$. Предложение доказано.

З а м е ч а н и е. Если функционалы $G_i\ (i=1,2,\ldots,s)$ непрерывны в точке $\bar{x}$, то можно утверждать, что найдутся коэффициенты $\bar{\alpha}_i$, обладающие свойством дополняющей нежесткости, т.е. $\bar{\alpha}_{i_0} = 0$, если $G_{i_0}(\bar{x}) < b_{i_0}$. Действительно, в этом случае в качестве конуса $K_{i_0}$ можно взять все пространство и единственный неотрицательный на $K_{i_0}$ функционал совпадает с нулем.

Из предложения 4.I. и результатов параграфов 2 и 3 теперь тривиально вытекает следующая основная

Т е о р е м а 4.I. Если максимум в задаче 4.I. достигается на теле $\bar{x} \in WO_n$, то при некоторых, обладающих свойством дополняющей нежесткости $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_s \in R_+$ и $\bar{\mu} \in W^*_{n,\bar{x}}$ смешанные поверхностные функции тела $\bar{x}$ удовлетворяют соотношению

$$\mu_{m_0,k_0}(\mathfrak{A}^0, \bar{x}, \mathcal{L}^0) + \bar{\mu} = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i\, \mu_{m_i,k_i}(\mathfrak{A}^i, x, \mathcal{L}^i)\,, \qquad (9)$$

если, кроме того, $\bar{x}$ – регулярное тело, то в формуле (9) $\bar{\mu} = 0$.

П р и м е р 4.I. Ищется регулярное тело $x \in WR_n$ из условий:

1. $V_m(x, x_1) = c \quad (x_1 \in WR_n\ ;\ n > m\ ;\ c > 0)$;
2. $V_p(x, x_1)$ – достигает максимума $(p \neq m)$.

По теореме 4.1 найдется $\bar{\alpha} > 0$, такое что

$$\mu_p(\bar{x}, x_1) = \bar{\alpha}\,\mu_m(\bar{x}, x_1),$$

отсюда по теореме Александрова-Волкова [13] следует, что $\bar{x} \mp \beta x_1\ (\beta > 0)$, следовательно, решение задачи дается формулой

$$\bar{x} \mp \left(\frac{c}{V(x_1)}\right)^{\frac{1}{n \cdot m}} x_1 .$$

Приведенный пример, содержит, в частности, изопериметрическую теорему.

Пример 4.2. Ищется регулярное тело $x \in WR_n$ из условий:

1. $V_1(x, x_i) \le b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \quad (x_1, \ldots, x_s \in WR_n)$;
2. $V(x)$ - достигает максимума.

По теореме 4.1 найдутся $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in R_+$ такие, что

$$\mu(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{s} \bar{\alpha}_i \mu_1^i(\bar{x}, x_i) = \mu_1(\bar{x}, \sum_{i=1}^{s} \bar{\alpha}_i, x_i),$$

следовательно, по теореме Александрова-Волкова

$$\bar{x} \in K(x_1, \ldots, x_s, e_1, \ldots, e_n, e_{-1}, \ldots, e_{-n}); \qquad (10)$$

здесь $K(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot,\cdot)$ - выпуклая коническая оболочка в $W_n$ перечисленных множеств. Отметим еще, что поиск тела из (10) при условиях 1,2 есть конечномерная задача математического программирования ( если считать известными числа $V(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$, где индексы $i_1, i_2, \ldots, i_n$ независимо пробегают множество $\{1, 2, \ldots, s\}$ ).

Пример 4.3. Пусть $1 \le p, q \le n-1$; $p + q = n$, а $R^p$ и $R^q$ - два ортогональных и взаимно дополнительных подпространства $R^n$. Требуется в множестве $WR_p + WR_q$ найти тело $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, такое, что $S(\bar{x}) \le c$ и максимум функции $V(x)$ равен $V(\bar{x})$. Известно [10], что для любых $x_1 \in W_p$, $x_2 \in W_q$ имеют место формулы :

$$S(x_1, x_2) \triangleq S(x_1 + x_2) = \overset{(1)}{V}(x_1)\,\overset{(2)}{S}(x_2) + \overset{(1)}{S}(x_1) \cdot \overset{(2)}{V}(x_2);$$

$$V(x_1, x_2) \triangleq V(x_1 + x_2) = \overset{(1)}{V}(x_1) \cdot \overset{(2)}{V}(x_2);$$

где $\overset{(1)}{V}, \overset{(1)}{S}$ ; $\overset{(2)}{V}, \overset{(2)}{S}$ - объем и площадь в пространствах $W_p$ и $W_q$ соответственно.

Выписывая условие пропорциональности градиентов на направлениях вида $(x_1, 0)$; $(0, x_2)$, как и выше, получим

$$\bar{x}_1 \mp \bar{\alpha}\,\gamma_p; \quad \bar{x}_2 \mp \bar{\beta}\,\gamma_q \quad (\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in R_+).$$

§ 5. В этом параграфе мы уточним предыдущие результаты для частного случая задачи 4.1. Именно рассмотрим следующую задачу квазивогнутого программирования:

Задача 5.I. Заданы:

тела $y_1, \dots, y_m \in \mathcal{W}O_n$ ;

числа $b_i > 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$.

Ищется тело $x \in \mathcal{W}_n$, удовлетворяющее условиям:

1. $V_1(y_i, x) \leq b_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ ;
2. $V(x)$ – достигает максимума.

Договоримся называть выпуклый компакт допустимым, если он удовлетворяет ограничениям группы I. Условимся ещё обозначать через $x(\alpha)$, где $\alpha \in R_+^m$, элемент из $\mathcal{W}_n$, такой, что

$$\mu(x(\alpha)) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, \mu(y_i)$$

( существование такого элемента следует из теоремы 2.I (Александрова)).

Имеет место следующая

Теорема 5.I. Для того, чтобы допустимое тело $\bar{x}$ являлось решением задачи 5.I, необходимо и достаточно, чтобы нашлись обладающие свойством дополняющей нежесткости числа $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_m \in R_+$ такие, что выполняются условия:

1. $\bar{x} \lessgtr x(\bar{\alpha})$ ;
2. $V(\bar{x}) = V_1(x(\bar{\alpha}), \bar{x})$.

<u>Достаточность</u>. Рассмотрим функцию:

$$\varphi(x, \alpha) \triangleq V^{\frac{n-1}{n}}(\bar{x})\, V^{\frac{1}{n}}(x) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (b_i - V_1(y_i, x)),$$

являющуюся функцией Лагранжа задачи А, в которой при условиях задачи 5.I максимизируется функция $V^{\frac{n-1}{n}}(\bar{x})\, V^{\frac{1}{n}}$. Ясно, что любое решение задачи А есть решение задачи 5.I, и наоборот. Таким образом, ввиду теоремы Куна-Таккера [15], достаточно проверить, что $(\bar{x}, \bar{\alpha})$ есть седловая точка функции $\varphi$ на множестве $\mathcal{W}_n \times R_+^m$, т.е. что для всяких $x \in \mathcal{W}_n$ и $\alpha \in R_+^m$ справедливы неравенства:

$$\varphi(\bar{x}, \alpha) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{\alpha}) \geq \varphi(x, \bar{\alpha}).$$

Пусть $\Psi \triangleq \varphi(\cdot, \bar{\alpha})$, тогда $\Psi$ -вогнутая функция, следовательно,

$$\Psi(x) + \Psi'_x(y - x) \geq \Psi(y) \quad (x, y \in \mathcal{W}_n).$$

Заметим ещё, что для всякой $g \in \mathcal{W}_{n, \bar{x}}$ выполняется равенство

$$\Psi'_{\bar{x}}(g) = \int g(z)\, d\mu(\bar{x})(z) - \sum_{i=1}^{m} \bar{\alpha}_i \int g(z)\, d\mu(y_i)(z).$$

Так как по условию

$$\int_{Z_n} \bar{x}\, d\mu(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \bar{\alpha}_i \int_{Z_n} \bar{x}\, d\mu(y_i)$$

и, кроме того, $\forall \gamma \in \mathcal{W}_n$

$$\int_{I_n} \gamma \, d\mu(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \bar{\alpha}_i \int_{I_n} \gamma \, d\mu(y_i),$$

то $\Psi'_{\bar{x}}(g) \leq 0$. Отсюда следует, что функция $\Psi$ достигает на $\mathcal{W}_n$ максимума в точке $\bar{x}$. Тем самым правая часть седлового неравенства установлена.

С другой стороны, т.к. $\bar{x}$ допустимо и $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m \in R_+$ удовлетворяют условию дополняющей нежесткости, то

$$\varphi(\bar{x}, \bar{\alpha}) = V(\bar{x}) \leq V(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (b_i - V_1(y_i, \bar{x})) = \varphi(\bar{x}, \alpha)$$

для всякого $\alpha \in R^m_+$.

<u>Необходимость</u>. В силу теоремы 4.I, найдутся обладающие свойством дополняющей нежесткости числа $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m \in R_+$ и $\bar{\mu} \in \mathcal{W}^{\wedge}_{n,\bar{x}}$ такие, что

$$\mu(\bar{x}) + \bar{\mu} = \sum_{i=1}^{m} \bar{\alpha}_i \, \mu(y_i);$$

отсюда, очевидно, $\bar{x} \underset{T}{\leq} x(\bar{\alpha})$. Кроме того,

$$\bar{\mu} = \sum_{i=1}^{m} \bar{\alpha}_i \, \mu(y_i) - \mu(\bar{x}) \quad \text{и} \quad \bar{\mu} \in \mathcal{W}_{n,\bar{x}},$$

т.е. по теореме 3.4 $\int_{I_n} \bar{x} \, d\bar{\mu} = 0$, значит,

$$V(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \bar{\alpha}_i V_1(y_i, \bar{x}) = V_1(x(\bar{\alpha}), \bar{x}).$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Пусть $x(\tilde{\alpha})$-допустимо и $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_m \in R_+$ обладают свойством дополняющей нежесткости, тогда $x(\tilde{\alpha})$ - решение задачи 5.I.

З а м е ч а н и е. В виду теоремы 3.3, в случае плоскости теорема 5.I принимает более наглядную форму. Именно: допустимое тело $\bar{x}$ является решением тогда и только тогда, если найдутся обладающие свойством дополняющей нежесткости числа $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m \in R_+$ и выпуклые компакты $\bar{y}, \bar{\gamma} \in \mathcal{W}_2$, такие что

1. $\bar{x} + \bar{y} \underset{T}{=} \bar{\gamma} + \sum_{i=1}^{m} \bar{\alpha}_i y;$

2. $\bar{y} \underset{T}{\geq} \bar{\gamma};$

3. $V(\bar{y}, \bar{x}) = V(\bar{\gamma}, \bar{x}).$

Рассмотрим теперь полностью линейную задачу.

З а д а ч а 5.2. Заданы:

тела $y_0, y_1, \ldots, y_m \in \mathcal{W}_n$;

числа $b_1, \ldots, b_m \in R_+$.

Ищется тело $x \in \mathcal{V}_n$, удовлетворяющее условиям:

I. $V_1(y_i, x) \leq b_i \quad (i=1,2,\dots,m)$;

2. $V_1(y_0, x)$ – достигает максимума.

Можно показать, что двойственной к этой задаче является

Задача 5.3. Ищется вектор $\alpha \in R_+^m$, удовлетворяющий условиям :

I. $y_0 \lessgtr x(\alpha)$;

2. $\nu(\alpha) \triangleq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i$ – достигает минимума.

Любопытно отметить, что в случае плоскости, когда к тому же $y_i \; (i=1,2,\dots,m)$ есть многоугольники, заданные пересечением полупространств, задача 5.3 сводится к задаче линейного программирования [I4].

§ 6. До сих пор мы рассматривали задачи, в которых линейные ограничения задавались александровскими мерами. Однако, таким образом, нельзя задать ограничения на опорные расстояния, ширины или условия типа текущего многогранника [I4]. В этом параграфе мы кратко проиллюстрируем результаты, полученные для задач такого типа.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 6.I. Заданы:

многогранник $P \triangleq \bigcap_{i=1}^{s} \{x \in R^n : (x, z_i) \leq c_i\} \qquad (z_i \in Z_n)$;

тела $y_1, \dots, y_m \in \mathcal{V}_n$;

числа $b_1, \dots, b_m \in R_+$.

Ищется тело $x \in \mathcal{V}_n$, удовлетворяющее условиям:

I. $x \subset P$;

2. $V_1(y_j, x) \leq b_j \quad (j=1,2,\dots,m)$;

3. $V(x)$ – достигает максимума.

Под задачей B мы будем понимать задачу, в которой ищутся тело $y \in \mathcal{V}_n$ и вектор $u \in R^n$, такие что $y + u$ допустимо в задаче 6.I и $V(y)$ – достигает максимума.

Рассмотрим систему неравенств:

$$\begin{cases} \alpha \in R_+^s \\ \sum_{i=1}^{s} \alpha_i z_i^{(k)} = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Пусть $\nu_1, \dots, \nu_p$ – остов многогранного конуса решений этой системы. Для $t=1,2,\ldots,p$ положим

$$\mu_t \triangleq \sum_{i=1}^{s} \nu_t^{(i)} \varepsilon_{z_i} .$$

Как видно из дальнейшего, можно считать, что $\mu_t \in A_n$, и пусть $x_t \in \mathcal{K}_n$ $(t=1,\ldots,p)$ таковы, что $\mu(x_t)=\mu_t$.

Аналогично теореме 5.I устанавливается

Т е о р е м а 6.I. Для того, чтобы тело $\bar{x}$ являлось решением задачи 6.I необходимо и достаточно, чтобы нашлись $\bar{y} \in \mathcal{K}_n$ и $\bar{u} \in R^n$, допустимые в задаче В, и числа $\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{\alpha}_{p+m} \in R_+$ такие, что выполняются условия:

1. $\bar{x} = \bar{y} + \bar{u}$ ;
2. $\bar{x} \underset{T}{\leqslant} x(\bar{\alpha})$ ; $\quad \left(\mu(x(\bar{\alpha})) \triangleq \sum_{t=1}^{p} \bar{\alpha}_t \mu(x_t) + \sum_{j=1}^{m} \bar{\alpha}_{p+j}\, \mu(y_j)\right)$;
3. $V(\bar{x}) = V_1(x(\bar{\alpha}), \bar{x})$ ;
4. Система чисел $\bar{\bar{\alpha}}_1,\ldots,\bar{\bar{\alpha}}_{s+m} \in R_+$ обладает свойством дополняющей нежесткости для задачи В. Здесь

$$\bar{\bar{\alpha}}_i \triangleq \sum_{t=1}^{p} \bar{\alpha}_t \nu_t^{(i)} \quad (i=1,2,\ldots,s); \quad \bar{\bar{\alpha}}_{s+j} \triangleq \bar{\alpha}_{p+j} \ (j=1,2,\ldots,m).$$

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что задача типа задачи 6.I есть задача квазивогнутого программирования, причем если экстремум в ней достигается на компакте $\bar{x} \in \mathcal{K}\,O_n$, то условие Слейтера заведомо выполнено, таким образом, по теореме Куна – Таккера имеет место неравенство

$$\varphi(\bar{x}, \bar{\alpha}) \geqslant \varphi(x, \bar{\alpha}) \qquad (x \in \mathcal{K}_n),$$

где $\varphi$ – соответствующая функция Лагранжа и $\bar{\alpha}$ – решение двойственной задачи [15].

П р и м е р 6.I. Пусть $x_0 \in \mathcal{K}_n$ – многогранник, $(n-1)$-мерные грани которого имеют площадь $\ell_i$ и внешние нормали $z_i$ $(i=1,\ldots,m)$

Рассмотрим следующую простейшую задачу:

Найти $x \in \mathcal{K}_n$, удовлетворяющий условиям:

1. $x \subset x_0$ ;
2. $V^{\frac{m-1}{m}}(x_0) V_m^{\frac{1}{m}}(x_0, x)$ – достигает максимума.

Очевидно, что решением этой задачи является $x_0$. Нетрудно проверить, что $\bar{\alpha}_i = \frac{\ell_i}{n}$ $(i=1,\ldots,m)$, откуда

$$V^{\frac{m-1}{m}}(x_0)\, V_m^{\frac{1}{m}}(x_0, x) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \ell_i (x_0(z_i) - x(z_i)) \leqslant V(x_0) ;$$

и, так как

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} l_i x_o(z_i) = V(x_o); \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} l_i x(z_i) = V_1(x_o, x);$$

то, используя аппроксимацию многогранниками, для всяких $x_1; x_o \in \mathcal{K}_n$ получим соотношение

$$V^{m-1}(x_o)\, V_m(x_o, x_1) \leq V_1^m(x_o, x_1)$$

– одна из форм неравенства Александрова.

Пример 6.2. Рассмотрим следующую задачу. Среди выпуклых фигур на плоскости, лежащих в данном выпуклом многоугольнике $P$ и имеющих заданный периметр, найти фигуру наибольшей площади – $\bar{x}$. Для простоты предположим ещё, что вписанный в $P$ круг касается всех его сторон. Теорема 6.1 в этом случае утверждает, что $\bar{x}$ либо многоугольник $P$, либо круг, либо внешнее параллельное к $P$ множество (с точностью до гомотетии).

## Литература


1. Н.Бурбаки. Интегрирование. М. 1967
2. А.Д.Александров. К теории смешанных объёмов выпуклых тел. Матем.сб. 2(44):5, 1937, 947-972; Матем.сб. 2(44):6, 1937, 1205-1238; Матем.сб. 3(45):1, 1938, 27-46; Матем.сб. 3(45):2, 1938, 227-251.
3. В.А.Вертгейм, Г.Ш.Рубинштейн. К определению квазивыпуклых функций. Сб."Математическое программирование", М.1966,121-133
4. L.Hörmander. Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans une espace localement convexe. Arkiv för Matematik, B 3, H2, 1955.
5. А.Г.Пинскер. Пространство выпуклых множеств локально выпуклого пространства. Сб. "Некоторые классы полуупорядоченных пространств". Изд. ЛГУ, 1966.
6. А.М.Рубинов. О некоторых свойствах сублинейных функционалов. Сб. "Оптимальное планирование". Н., 1967, 9, 77-86.
7. Л.В.Канторович, Б.З.Вулих, А.Г.Пинскер. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М., 1950.
8. T.Bonnesen, W.Fenchel. Theorie der konvexen Körper, Berlin, 1934.
9. Г.Буземан. Выпуклые поверхности. М. 1964.
10. Г.Хадвигер. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М. 1966.
11. Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц. М. 1966.
12. А.Я.Дубовицкий, А.А.Милютин. Задачи на экстремум при наличии ограничений. ЖВМ и МФ. 5, 3 (1965), 395-453.
13. А.Д.Александров, Ю.А.Волков. Теоремы единственности для поверхностей "в целом". Вест.ЛГУ, №7, 1958, 14-26.

14. С.С.Кутателадзе. Некоторые геометрические приложения линейного программирования. Наст. сбор., 88-95.

15. Г.Ш.Рубинштейн. Несколько примеров двойственных экстремальных задач. Сб. "Матем. программирование" М. 1966, 9-39.

Поступила в редакцию
19.VI. 1969 г.