УДК 513.88:513.83(07)

# О ПРИБЛИЖЕННОМ ОТЫСКАНИИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

Б.А. Вертгейм

В статье рассмотрены способы эффективного приближенного отыскания неподвижных точек непрерывных отображений с помощью симплициальных разбиений, являющихся, как известно, важным конструктивным инструментом комбинаторной (алгебраической )топологии. В терминах топологических индексов неподвижных точек дано достаточное условие сходимости приближения к заданной неподвижной точке. Установлена связь способа симплициальных разбиений со способом, недавно предложенным в статье [7] , и получено достаточное условие сходимости построенных в указанной статье приближений.

Хорошо известна роль теорем о неподвижных точках непрерывных отображений в теории оптимального планирования. Здесь в первую очередь следует назвать теорему Брауэра и её глубокие и далеко идущие обобщения- теоремы Лефшеца-Хопфа, Какутани, Шаудера, Тихонова [I,2] Теорема Брауэра лежала в основе первых доказательств основной теоремы Неймана в теории игр, а также теорем о существовании состояния равновесия в моделях Вальда; Неймана ( некоторые аналогичные факты теперь проще получать с помощью теоремы Какутани; можно также использовать несколько иной источник - теоремы об отделимости выпуклых множеств). Для бесконечномерных обобщений существенны теоремы Шаудера и Тихонова и их усиления. Все это делает актуальным малоизученный вопрос об эффективном отыскании неподвижных точек в условиях, например, теоремы Брауэра. Как известно, здесь нет такой простой и удобной процедуры, как способ итераций для построения последовательных приближений к единственной неподвижной точке в условиях теоремы о сжатии полного метрического пространства.

Поиск неподвижной точки (решение уравнений) обычно идёт в два приёма.

I этап - локализация решения ( или отделение корня, как принято говорить в одномерном случае). II этап -аппроксимация решения с любой заданной степенью точности, исходя из найденного на I этапе начального приближения. На этом этапе успешно применяются методы Ньютона-Канторовича, скорейшего спуска и другие итеративные методы. I этап разработан в меньшей степени; способ разбиений, обсуждаемый в этой статье, имеет, в основном, отношение к первому этапу.

Мы будем строить приближения с помощью симплициальных разбиений полиэдров. Способы, к которым можно прийти на этом пути, очевидно, можно до некоторой степени рассматривать как многомерные аналоги известного метода доказательства теоремы Больцано-Коши о нулях непрерывной функции путем деления промежутка на частичные (например, половинные) промежутки - этот метод можно считать эф - фективным - хотя и медленно сходящимся - способом отыскания нуля функции.

Серьезное отличие и трудность многомерного случая состоит в следующем. I) В одномерном случае нуль функции принадлежит частичному промежутку, на концах которого функция имеет разные знаки. Для других размерностей подобное свойство не имеет места: нуль векторного поля (или неподвижная точка отображения ) не связан отношением $\in$ ("принадлежность ") с так называемым нормальным [I,2] симплексом - аналогом одномерного промежутка, прохождение которого меняет знак у функции. Далее в этой статье показано, что эти объекты в ряде случаев близки друг к другу. 2) Быстрое увеличение объема вычислений, связанных с достаточно мелким разбиением исходного полиэдра на частичные. Это требует создания способа для поиска нормальных симплексов, существенно более экономного, чем полный перебор всех частичных симплексов.

Определение понятия нормальный симплекс и его обобщение дано ниже. Следующие вопросы, очевидно, существенны в связи с оценкой эффективности подобного рода способов:

I) Методика нумерации вершин симплексов разбиения.

2) Оценка близости представительного (нормального )симплекса к неподвижной точке ( или нулевому вектору) векторного поля.

3) Достаточные условия для того, чтобы заданная неподвижная точка являлась пределом последовательности вершин представительных симплексов.

4) Экономные способы поиска представительных симплексов в данном симплициальном разбиении.

Переходим к подробному освещению этих вопросов.

I.Пусть $T$ - замкнутое связное подмножество $n$ - мерного евклидова пространства $E^n$, $f: T \longrightarrow E^n$ -непрерывное отображение. Очевидно, множество неподвижных точек отображения $f$ совпадает с $\varphi^{-1}(0)$, где $\varphi(x) = f(x) - x$ .

Опишем конструкцию, с помощью которой будет осуществляться нумерация вершин симплексов. Пусть $Z_{n+1} = \{1, 2, \ldots, n+1\}$.

Введем систему $n+1$ непрерывных вектор-функций $v_i : T \to E_n$, где $i \in Z_{n+1}$ таких, что при любом $x \in T$ имеют место соотношения

$$\sum_{i=1}^{n+1} v_i(x) = 0, \quad (v_i(x), v_j(x)) < 0, \quad i \neq j, \tag{I}$$

причем для любого $x$ система векторов $\{v_i(x)\}$, $i = 1, \ldots, n$, линейно независима. Часто удобно брать все функции $v$ постоянными, например:

а) $v_i = e_i$, $i = 1, \ldots, n$, где ( $e_i$ ) образуют ортонормальный базис $E^n$, $v_{n+1}$ определяется тогда из условия (I)

б) В случае, когда $T \subset E^n$ - $n$-мерный (геометрический) симплекс, удобно взять $v_i$ колинеарными векторам ( $p_i$ ), $i \in Z_{n+1}$, где $p_i$ - нормали (внутренние или внешние ) к ($n$ - I)-мерным граням симплекса T.

Способ нумерации вершин частичных симплексов, описываемый ниже, при таком выборе ( $v_i$ ) будет совпадать с обычно применяемым при доказательстве теоремы Брауэра способом, основанном на сравнении барицентрических координат исходной точки и её образа.

Образуем для заданной функции $\varphi(x) = f(x) - x$ и выбранной системы векторов ( $v_i(x)$ ) множества

$$M_i = \{x \in T \mid (\varphi(x), v_i(x)) \geq 0\}, \quad i \in Z_{n+1} \tag{2}$$

Очевидно, что $M_i$ - замкнутые множества.

Л е м м а I.

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} M_i = \varphi^{-1}(0), \quad \bigcup_{i=1}^{n+1} M_i = T. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $\varphi(x) = 0$ влечет $x \in M_i$ для всех $i$. Докажем обратное включение. Из условия (I) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\varphi(x), v_i(x)) = 0. \tag{4}$$

Если здесь все слагаемые неотрицательны (то есть $x \in \bigcap_i M_i$ ), то все они должны быть нулевыми,

$$(\varphi(x), v_i(x)) = 0, \quad i \in Z_{n+1}$$

откуда следует, что $\varphi(x) = 0$, $x \in \varphi^{-1}(0)$, поскольку по построению система векторов ( $v_i(x)$ ) порождает пространство $E^n$.

Из формул (2) и (4) следует, очевидно, что $T = \bigcup M_i$ ( иначе $\exists x \in T \mid (\varphi(x), v_i(x)) < 0$ для всех $i$, что противоречит соотношению (4) ).

З а м е ч а н и е. Если перейти к координатной форме и выбрать ( $v_i$ ) по правилу а) (см. выше), то из леммы 1 следует, что $n$ уравнений $\varphi_i = 0$ эквивалентны $n+1$ неравенству:

$\varphi_i(x) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \leq 0$ это, очевидно, экономнее, чем иногда применяемый переход к $2n$ неравенствам:

$$\varphi_i(x) \geq 0, \quad \varphi_i(x) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq n .$$

Введём обозначения: $\mathcal{P}(Z_{n+1})$ – множество всех подмножеств множества $Z_{n+1}$. С помощью определенных выше множеств $M_i$ построим точечно-множественное отображение $\mu$ из $T$ в $Z_{n+1}$ – то есть обычное отображение $\mu : T \to \mathcal{P}(Z_{n+1})$ : каждой точке $x \in T$ отображение $\mu$ ставит в соответствие подмножество $\mu(x)$, такое, что

$$\mu(x) = \{ i \in Z_{n+1} \mid x \in M_i \} . \qquad (5)$$

С л е д с т в и е л е м м ы I. Для всех $x \in T$ $\mu(x) \neq \varnothing$. Существо обсуждаемого в данной статье подхода состоит в использовании вместо данного непрерывного отображения $f$ дискретного отображения $\mu$.

О п р е д е л е н и е. I) Нумерация, соответствующая $\varphi$ ( или $f$ ) – это отображение $\nu = \nu_f : T \to Z_{n+1}$, такое, что

$$\nu(x) \in \mu(x) \quad \text{для всех} \quad x \in T .$$

2) Конечное или бесконечное множество точек $D$ назовём представительным (для $\mu$ ), если

$$\bigcup_{x \in D} \mu(x) = Z_{n+1} .$$

Симплекс назовём представительным, если таково множество его вершин.

3) $n$ – мерный симплекс $\sigma$ называется нормальным для $\nu$, если образ множества $W_\sigma$ его вершин совпадает с $Z_{n+1}$, то есть $\nu(W_\sigma) = Z_{n+1}$, см. [1, 2].

4) $(n-1)$ – мерный симплекс $\sigma$ назовем при заданном $i$ $(C_i)$-нормальным, если $\quad \nu(W_\sigma) = Z_{n+1} - \{i\}$.

Нормальный симплекс представителен; в нумерации $n$ -мерного нормального симплекса участвуют все числа, от I до $n+1$, в нумерации $(C_i)$ -нормального симплекса участвуют все эти числа, кроме $i$ ; в обоих случаях разным вершинам поставлены в соответствие разные номера.

2. Дадим оценку близости представительного симплекса к неподвижной точке. Эта оценка основана по существу на лемме Лебега о по-

крытии компактного множества, см.[I, 9]; в оценке участвует число Лебега открытого покрытия компакта $P_\varepsilon$ ( см. ниже ). Предположим для простоты, что $x^*$ - изолированная неподвижная точка отображения $f$ ; иначе говоря, $\varphi(x^*) = 0$ и существует в $E^n$ окрестность $U = U(x^*)$ точки $x^*$ такая, что

$$U \cap T \cap \varphi^{-1}(0) = \{x^*\} . \qquad (6)$$

Введём еще сферу $S_\varepsilon$ и её дополнение $CS_\varepsilon$ , где

$$S_\varepsilon = \{x \in E^n \mid d(x, x^*) < \varepsilon\} .$$

Образуем множества $Q$ и $P_\varepsilon$ (компакт):

$$P_\varepsilon = T \cap CS_\varepsilon \cap \bar{U}, \qquad Q = \{\varepsilon \in R \mid \varepsilon > 0, \ S_\varepsilon \subset U\},$$

и введем функцию $\rho(x, \varepsilon)$ ,определяемую соотношением ( для

$$\varepsilon \in Q, \ x \in P_\varepsilon) \quad \rho(x, \varepsilon) = \max_{i \in Z_{n+1}} d(x, M_i),$$

где $d(x, M_i)$ - расстояние от точки $x$ до замкнутого множества $M_i$; $d$ - очевидно, непрерывная функция от $x$ ; такова же и функция $\rho(x, \varepsilon)$ при заданном $\varepsilon$ . Из леммы I и того, что $x^*$ -изолированная неподвижная точка, так что $\varphi^{-1}(0) \cap P_\varepsilon = \Phi$, следует, что $(\bigcap_i M_i) \cap P_\varepsilon = \Phi$ , а так как все $M_i$ - замкнутые множества,то $\rho(x, \varepsilon) > 0$ для всех $x \in P_\varepsilon$ .

Определим теперь функцию

$$\gamma(\varepsilon) = \min_{x \in P_\varepsilon} \rho(x, \varepsilon) = \min_{x \in P_\varepsilon} \max_{i \in Z_{n+1}} d(x, M_i) .$$

Л е м м а 2. а) $\gamma(\varepsilon) > 0$ для всех $\varepsilon \in Q$ ;
б) $\gamma(\varepsilon)$ - возрастающая функция ;
в) $\gamma(\varepsilon) \leq \varepsilon$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Из компактности множества $P_\varepsilon$ и непрерывности и положительности функции $\rho(x, \varepsilon)$ ( при заданном $\varepsilon \in Q$ ) следует, что $\gamma(\varepsilon) = \rho(x_0, \varepsilon) > 0$ ; здесь $x_0 = x_0(\varepsilon)$ - точка, в которой достигается минимум функции $\rho(x, \varepsilon)$ $(x \in P_\varepsilon)$.

б) $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow CS_{\varepsilon_1} \supset CS_{\varepsilon_2} \Rightarrow P_{\varepsilon_1} \supset P_{\varepsilon_2}$ .

При этом $\rho(x, \varepsilon_2)$ есть сужение $\rho(x, \varepsilon_1)$ на множество $P_{\varepsilon_2}$, поэтому минимум не убывает при переходе от $\varepsilon_1$ к $\varepsilon_2$.

в)Возьмем точку $x_1 = x_1(\varepsilon)$ такую, чтобы $x_1 \in P_\varepsilon$ , $d(x_1, x^*) = \varepsilon$. Так как $x^* \in \bigcap M_i$ , то для всех $i \in Z_{n+1}$ $d(x_1, M_i) \leq \varepsilon$ ; поэтому $\rho(x_1, \varepsilon) \leq \varepsilon$, $\gamma(\varepsilon) \leq \varepsilon$ .

Пусть $D$ – конечное представительное множество, $D \subset T \cap \bar{U}$.

Удобно ввести центр $c$ и радиус $\delta$ множества $D$ с помощью следующих соотношений:

$$\delta = \min_{x \in E^n} \max_{y \in D} d(x,y) = \max_{y \in D} d(c,y).$$

Нам понадобится еще функция $\beta$, "обратная" к $\gamma$:

$$\beta(\rho) = \sup\{\varepsilon \in Q \mid \gamma(\varepsilon) \le \rho\} \quad (\rho > 0).$$

Из леммы 2 следует, что $\beta(\rho)$ – неубывающая функция и что

$\lim_{\rho \to 0} \beta(\rho) = 0$. Действительно, пусть $\eta > 0$, $\gamma(\eta) = \delta > 0$ ( по лемме 2 ). Тогда при $0 < \rho < \delta$ имеем $0 < \beta(\rho) < \eta$.

Теорема I. Пусть $f: T \to E^n$ – непрерывное отображение, $x^*$ – изолированная неподвижная точка $f$, а $U$ – окрестность $x^*$ такая, что выполнено условие (6).

Пусть $D$ – представительное множество ( в частности нормальный симплекс) с центром в точке $c$ и радиусом $\delta$, такое что

$\{c\} \cup D \subset T \cap U$. Тогда $\quad d(c, x^*) \le \beta(\delta)$. $\qquad$ (7)

Доказательство. Из определения радиуса $\delta$ и центра $c$ видно, что $d(c, w_i) \le \delta$ для всех $i \in Z_{n+1}$, $w \in D$. Так как множество представительное, то $d(c, M_i) \le \delta$ для всех $i$; $\rho(c, \varepsilon^*) \le \delta$, где в качестве $\varepsilon^*$ взято $\varepsilon^* = d(c, x^*)$.

Поэтому $\gamma(\varepsilon^*) \le \delta$ и из определения функции $\beta$ видно, что $\varepsilon^* = d(c, x^*) \le \beta(\delta)$.

Следствие. Пусть в условиях теоремы строится последовательность комплексов $K_m$ – симплициальных разбиений окрестности (полиэдра) $U$, такая, что $\lim \delta_m = 0$, где $\delta_m$ – наибольший из радиусов частичных симплексов, и пусть для любого $m$ существует представительный симплекс $\sigma_m \in K_m$ с центром в точке $c_m$, удовлетворяющий условию (7). Тогда $\lim c_m = x^*$, и для любой возможной последовательности $\sigma'_m \in K_m$ представительных симплексов $\lim c'_m = x^*$.

Замечания. В условиях следствия нет необходимости переходить, как это обычно делается в теории, к подпоследовательности симплексов. Это обстоятельство, разумеется, связано с единственностью неподвижной точки в $U$. Ясно также, что

$$\delta \le \operatorname{diam} \sigma = \max d(W_i, W_j)$$

и что из $\delta_m \to 0$, $c_m \to x^*$ следует сходимость $W^m_{i(m)} \to x^*$, где для каждого $m$ $w^m_{i(m)}$ – одна из вершин $\sigma_m$, по произволу выбранная.

3. Займемся теперь следующим вопросом: для каких неподвижных точек отображения $f$ представительные симплексы могут дать средство построения приближений ?

Следующий простой пример показывает, что не обязательно поблизости от каждой неподвижной точки будут находиться представительные симплексы.

П р и м е р а) Пусть $n=1$, $E^1=R$, $T=[-1,1]$; $f: T\to R$ определяется формулой $f(x)=x+x^2$, $\varphi(x)=x^2$,

$x^*=0$, $v_1=e_1$, $v_2=-e_1$,

$$M_1=\{x\in T\,|\,\varphi(x)\geq 0\}=T,\quad M_2=\{x\in T\,|\,\varphi(x)<0\}=\{0\}.$$

При любом разбиении сегмента $T$ на частичные сегменты, осуществляемом комплексом $K$, таким, что $0\notin K$, в комплексе $K$ отсутствуют представительные симплексы.

б) Видоизменение примера а) $f: T\longrightarrow T$ определяется формулой

$$f(x)-x=\varphi(x)=x^2\left(\frac{1}{2}-x\right).$$

Здесь две неподвижные точки: $x_1^*=0$, $x_2^*=\frac{1}{2}$.
Первая не может, а вторая может быть найдена способом деления промежутка на частичные (так как вблизи $x_1^*$ $\varphi$ не меняет, а в районе $x_2^*$ меняет знак). Мы, конечно, исключаем случайность, в результате которой $x_1^*$ попадает в число точек деления и потому случайно находится точно за конечное число шагов.

Следующая теорема даёт в терминах топологических индексов, обычно существенных в задачах о неподвижных точках [1,2,3,5,6], достаточное условие применимости способа симплициальных разбиений.

Т е о р е м а 2. Пусть $x^*\in\mathring{T}$, $\varphi(x^*)=0$, $x^*$ имеет ненулевой индекс. Тогда существует выпуклая окрестность точки $x^*$ – полиэдр $\bar{U}\subset T$, для которого выполнено условие (6), и число $\delta>0$ ( число Лебега покрытия границы $\bar{U}$ множествами $CM_i$ ) такие, что для всякого разбиения полиэдра $\bar{U}$, осуществляемого комплексом $K$ с диаметром $d(K)<\delta$, и при любой нумерации $\nu=\nu_f$ в $K$ существует нормальный симплекс. Для любой последовательности таких комплексов $(K_m)$, $|K_m|=\bar{U}$, удовлетворяющей условию $\lim d(K_m)=0$, и любых последовательностей точек $(x_m)$ и нормальных симплексов $(\sigma_m)$ таких, что для всех $m$ $x_m\in\sigma_m\in K_m$, имеет место равенство $\lim x_m=x^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x^*\in\bar{U}\subset T$, где $U$ – окрестность внутренней точки $x^*\in\mathring{T}$. Будем считать, что $\bar{U}$ – выпуклый замкнутый полиэдр, $\bar{U}=|K|$, где $K$ $n$ – мерный ком -

плекс достаточно малого диаметра (последнее обстоятельство ниже уточнено ). Граница $\Gamma$ множества $U$ также трангулирована посредством $(n-1)$ - мерного подкомплекса $L$ комплекса $K$. Мы докажем сначала аналог леммы Шпернера для рассматриваемого случая.

Лемма 3. Пусть $t_n$-число нормальных $n$ -мерных симплексов в комплексе $K$, и для заданного $i$ $t_{n-1}(i)$ - число $(C_i)$--нормальных $(n-1)$ - мерных симплексов на границе - в комплексе $L$. Тогда

$$t_n \equiv t_{n-1}(i) \ (mod\ 2).$$

Доказательство. Определим на множестве $S^n$ всех $n$ -мерных симплексов комплекса $K$ целочисленную функцию $\zeta$, поставив каждому $\sigma \in S^n$ в соответствие число $\zeta(\sigma)$ его собственных $(n-1)$ -мерных $(C_i)$ - представительных граней. Можно показать, что для нормальных симплексов $\zeta(\sigma)=1$, в противном случае $\zeta(\sigma)=0$ или 2.

Лемма следует из сравнений

$$t_n \equiv \sum_{\sigma\in S} \zeta(\sigma) \equiv t_{n-1}(i) \ (mod\ 2).$$

Первое из сравнений справедливо потому, что $\zeta(\sigma)\equiv 0 \ (mod\ 2)$ для всех симплексов, кроме нормальных, второе -потому, что каждый граничный (принадлежащий подкомплексу $L$ ) $(C_i)$ - нормальный симплекс дает вклад + I в сумму $\sum \zeta(\sigma)$, а каждый внутренний $(C_i)$ - нормальный симплекс дает вклад + 2, будучи общей $(n-1)$ - мерной гранью двух $n$ -мерных симплексов комплекса $K$.

Теперь, предполагая индекс неподвижной точки нечётным, докажем нечётность $t_{n-1}(i)$ в условии теоремы ( для достаточно мелких разбиений). С этой целью построим вспомогательное симплициальное отображение $\Phi$ границы $\Gamma=|L|$, гомотопное сужению отображения (векторного поля ) $\varphi$ на $\Gamma$. Пусть все $v_i$ -постоянные векторы, а $\nu$ - нумерация, определенная выше. Определим отображение $\Phi$ на вершинах $w$ комплекса $K$ соотношениями:

$$\Phi(w) = v_{\nu(w)}$$

и продолжим полученное отображение линейно на все симплексы комплекса $K$. Далее будет показано, что $\Phi(x)\neq 0$ для всех $x\in\Gamma$.

Возьмем некоторое число $\varepsilon < \min\limits_{x\in\Gamma} d(x,x^*)$ и предположим разбиение $K$ столь мелким, что $\delta$ -максимальный радиус всех симплексов $K$ -удовлетворяет условию $\delta < \gamma(\varepsilon)$ ( функция $\gamma$ определена в предыдущем пункте ). Пусть $\sigma^{n-1}$ - произвольный граничный симплекс.

Сейчас мы докажем, что векторные поля $\varphi$ и $\Phi$ гомотопны на

$\Gamma$ , причем гомотопия осуществляется отображением

$$F(x,t) = (1-t)\,\varphi(x) + t\,\Phi(x)\,, \quad 0 \le t \le 1\,, \quad x \in \Gamma\,.$$

Надо доказать, что $F \neq 0$ для всех $x$ и $t$ . С этой целью возьмем в выбранном произвольно симплексе $\sigma^{n-1}$ с вершинами $w_i$, $1 \le i \le n$, и центром $c$ любую точку $x$ . Тогда

$$x = \sum_1^n \tau_i w_i\,, \quad \text{где} \quad \tau_i \ge 0\,, \quad \sum_1^n \tau_i = 1\,, \tag{8}$$

$$\Phi(x) = \sum_1^n \tau_i \Phi(w_i) = \sum_1^n \tau_i v_{\nu(w_i)}$$

(последняя формула и означает, что $\Phi$ получено линейным продолжением с множества вершин на весь симплекс $\sigma^{n-1}$ ).

Так как радиус $\sigma^{n-1}$ мал; (точнее)

$$\delta < \gamma(\varepsilon) \le \rho(c,\varepsilon) = \max_{j \in Z_{n+1}} d(c, M_j) = d(c, M_{j(\sigma)})\,,$$

то найдется такой номер $j(\sigma)$ ( на нем реализуется максимум в последней формуле) ,что $d(c, w_i) \le \delta < d(c, M_{j(\sigma)})$ $(1 \le i \le n)$, и следовательно, $\sigma^{n-1} \subset CM_{j(\sigma)}$ .

Так как $M_{j(\sigma)}$ и $|\sigma^{n-1}|$ - замкнутые множества,то найдется $\eta > 0$ такое,что

$$(\varphi(x),\ v_{j(\sigma)}) < -\eta < 0 \qquad \text{для} \quad \forall\, x \in \sigma^{n-1}$$

(см.определение $M_j$ в пункте I, ф-ла (3) ). В частности отсюда следует,что в нумерации вершин симплекса $\sigma^{n-1}$ не участвует число $j(\sigma)$ ; $\nu(\sigma^{n-1}) \subset Z_{n+1} - \{j(\sigma)\}$ или $\nu(w_i) \neq j(\sigma)$ для $1 \le i \le n$ .

Наконец, из условия (I) выводим, что $(\Phi(x), v_{j(\sigma)}) \le 0$ ,

$$((1-t)\varphi(x) + t\,\Phi(x),\ v_{j(\sigma)}) \le (1-t)(\varphi(x), v_{j(\sigma)}) < -(1-t)\,\eta < 0\,.$$

Таким образом $F$ действительно даёт гомотопию полей $\varphi$ и $\Phi$. То, что при $t = 1$ $F(x,1) = \Phi(x)$ нигде на $\Gamma$ в нуль не обращается, легко следует из формулы (8), в которой $\Phi$ представлена как выпуклая комбинация некоторого подсемейства семейства линейно-независимых векторов $(v_i)$ , $i \in Z_{n+1} - \{j\}$ .

Итак, поля $\varphi$ и $\Phi$ гомотопны на $\Gamma$ и, следовательно, имеют на $\Gamma$ одинаковое вращение ( см.[I , 3] ), равное индексу неподвижной точки $x^*$ и, следовательно, нечётное.

Функция $\Phi$ является,очевидно, симплициальным отображением полиэдра $\Gamma$ на границу невырожденного $n$ - мерного симплекса $\Sigma$ с вершинами $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}\}$ . Возьмем какую-ни - будь $(n-1)$ - мерную грань этого симплекса, например, не содержащую вершины $v_i$ грань $\mathcal{Y}_i$. В силу известного определения степени отображения, данного Брауэром, степень ( или вращение)отображения $\Phi$ равна разности $s_i - q_i$, где $s_i$ - число симплексов $\sigma^{n-1} \in L$ таких, что $\Phi$ отображает их на грань $\mathcal{Y}_i$ с сохранением ориентации, $q_i$ - число тех $\sigma^{n-1}$, для которых $\Phi$ даёт отображение на грань $\mathcal{Y}_i$ с изменением ориентации. Итак, $s_i - q_i$ и, следовательно, $t_{n-1}(i) = s_i + q_i$ - нечетные числа, что в силу леммы I и завершает доказательство теоремы 2, поскольку каждый симплекс, отображаемый с помощью $\Phi$ на грани $\mathcal{Y}_i$ является $(C_i)$ - нормальным по построению.

З а м е ч а н и е . Используя основную лемму из статьи [6], являющуюся дальнейшим обобщением леммы Шпернера, можно провести доказательство без предположения, что индекс-нечётное число, лишь бы он был ненулевым.

4. Изложим кратко, некоторые эффективные способы поиска представительных симплексов в заданном разбиении. Отметим, что в работе [7] предложен и успешно опробован для $n$ порядка IO-I5 способ приближения к неподвижной точке, причём приближение понимается в следующем смысле: невязка $\varphi(x) = f(x) - x$ должна быть по норме малой. Эта работа не содержит исследования вопроса о том, какие неподвижные точки в принципе могут быть определены предложенным способом. В статье [7] освещены истоки предложенного нам способа и указаны важные применения к теории игр $n$ лиц ( для определения точек из ядра игры ). В этой статье автор подчеркивал, что -"вопросы о том, какие точки ядра будут определяться... является интригущим, однако, его лучше отложить". Мы покажем,что способ отыскания неподвижных точек, применяемый в статье [7] тесно связан с симплициальными разбиениями, хотя автор [7] скорее противопоставляет, чем сопоставляет эти два подхода ( статья [7] относится к случаю, когда выполнены для некоторого симплекса условия теоремы Брауэра; поэтому подход,основанный на симплициальных разбиениях там связывается с леммой Шпернера ). Таким образом, мы получим достаточные условия применимости способа [7].

Приведем некоторые определения из статьи [7]. Пусть $\Sigma = \{x \in E^n \mid \sum_1^n x_i = 1,\ x_i \geq 0\}$ $(n-1)$ -мерный симплекс, $f: \Sigma \to \Sigma$ - непрерывное отображение, $P_k \subset E^n$ - конечное множество точек, $P_k = \{\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^n, \dots, \pi^k\}, (k > n)$, где $\pi^{n+q} \in \Sigma\ (q > 0)$, $\pi^i = (M_i, M_i, \dots, M_i, 0, M_i, \dots, M_i)\ (i \leq n)$, нулевая $i$-ая координата, $M_1 > M_2 > \dots > M_n > 1$.

О п р е д е л е н и е. Множество $n$ векторов $\{\pi^{i_\nu}\} \subset P_\kappa, \nu \le n$, называется примитивным, если в $P_\kappa$ не существует вектора $\pi^j$, такого, что

$$\forall i \quad \pi_i^j > \min(\pi_i^{i_1}, \ldots, \pi_i^{i_n}) \quad .$$

Геометрически это интерпретируется так : $(n - 1)$ - мерный симплекс (он называется примитивным подсимплексом), грани кото - рого "параллельны" граням $\Sigma$ и содержат соответствующие точки $\pi^{i_\ell}$ (не менее одной ), не содержит внутри других точек из $P_\kappa$. Принимается еще условие невырожденности:

$$\forall \; i, j, k \quad \pi_i^j \neq \pi_i^k \qquad (j \neq k) \; .$$

В этом случае; как легко видеть,точки примитивного множества $\{\pi^{i_1}, \ldots, \pi^{i_n}\}$ образуют невырожденный геометрический симплекс - назовем его симплексом, построенным на примитивном множестве (этого названия нет в [7] ,где эти симплексы по существу не ис - пользуются; не путать их с примитивными подсимплексами из [7] ). Основной факт, на который мы хотели бы обратить внимание, состоит в следующем.

Л е м м а 4. Пусть $K$ -множество всех $(n - 1)$ -мерных симплексов, построенных на примитивных множествах, и всех граней этих симплексов; первые $n$ точек из $P_\kappa$ исключены и в образовании примитивных множеств не участвуют. Тогда $K$ - $(n - 1)$ - мерный симплициальный комплекс, то есть $K$ даёт симплициальное разбиение полиэдра $|K| \subset \Sigma$. Для любого $\varepsilon > 0$ и всех $x \in \Sigma - |K|, d(x, \Gamma) < \varepsilon$ ( $\Gamma$ -граница $\Sigma$ ), если множества точек $P_\kappa$ выбрано достаточно "густым" на $\Sigma$ (нетрудно дать уточнения последнего условия, см. ,например [7] ).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проще всего использовать лемму I статьи [7] , лежащую в основе вычислительной процедуры, и ут - верждающую следующее: пусть $\{\pi^{i_1}, \ldots, \pi^{i_n}\} = P$ -примитив - ное множество, $\pi^{i_\ell}$ - один из его элементов. Тогда, за исключением одного специального случая (связанного с векторами $\pi^i \in P_\kappa$, $i \le K$ ) существует единственный вектор $\pi^j \in P_\kappa$, отличный от $\pi^{i_\ell}$ и такой, что множество $(P - \{\pi^{i_\ell}\}) \cup \pi^j$ - примитивное.

В лемме 4 надо доказать, что любые два симплекса,построенные на примитивных множествах, не пересекаются или пересекаются по множеству, которые в каждом из них служит гранью. С этой целью можно рассмотреть семейство всех примитивных множеств с одним общим элементом, скажем, $\pi^i$ , и, переходя от одного из этих мно - жеств к другому с помощью упомянутой леммы I в случае, если нарушено основное для комплекса условие ( примыкание по граням) прийти к противоречию. Мы опускаем подробности. Заметим лишь, что переход от одного примитивного множества к другому, осуществляемый в лемме 4, соответствует в комплексе $K$ переходу от одного $(n-1)$ - мерного симплекса к другому (единственно возможному), который с первым пересекается по некоторой выбранной $(n-2)$ - мерной грани.

На основании нашей теоремы 2 можно теперь сформулировать.

**Следствие.** Пусть $x^*$ -внутренняя точка симплекса (все координаты $x^*$ положительны ). Тогда метод, основанный на построении примитивных множеств, даёт сходящуюся к $x^*$ последовательность представительных симплексов, построенных на примитивных множествах, если индекс $x^*$ отличен от нуля.

Заметим, однако, что конкретный алгорифм, развитый в статье [7], не обязательно даёт приближения ко всем таким неподвижным точкам, поскольку в этом алгорифме начальные приближения всегда выбираются вблизи одной из вершин симплекса (конкретнее, описан алгорифм, ведущий приближения из района вершин ( 1,0, 0,... 0) ).

Опишем один алгоритм поиска представительных симплексов. Пусть $T$ - $n$ - мерный симплекс с вершинами $(a_i)$, $i \in Z_{n+1}$, $K$ - его триангуляция (конечный геометрический комплекс, см[9]). Введем новые вершины $(b_i)$, $i \in Z_{n+1}$, и с их помощью расширим $K$. Пусть дано множество $J \subset Z_{n+1}$, $J' = Z_{n+1} - J$, $|J| = p$ - число элементов $J$; пусть $\Gamma(J)$ - $(p-1)$ -мерная грань симплекса $T$, построенная на вершинах $(a_i)$, $i \in J$, $\sigma(J) \in K$ -некоторый $(p-1)$ - мерный симплекс, лежащий на $\Gamma(J)$. Обозначим через $\tau(J)$ $n$ - мерный симплекс, вершинами которого служат все вершины $\sigma(J)$ и точки $(b_k)$, $k \in J'$

Образуем комплекс $K_1 \supset K$, включив в него всевозможные симплексы $\tau(J)$ ( для всех $J$ и $\sigma(J)$ ) и все грани этих симплексов. Можно показать, что $K_1$ - замкнутое псевдомногообразие [1]; в него входят симплексы $\sigma_0 = (b_i)$, $i \in Z_{n+1}$ (при выборе $J = \varphi$ ) и все симплексы исходного геометрического комплекса $K$, которые получаются здесь при $J' = \varphi$.

Пусть $f: T \to T$ -непрерывное отображение, а дискретное отображение $\mu$ получено с помощью векторов $(v_i)$, выбранных по способу б) пункта 2 (см. выше); точнее $v_i$ -внутренняя нормаль к грани $(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \hat{a}_i, a_{i+1}, \dots, a_{n+1})$, противоположной вершине $a_i$ ( это отмечено в обозначении символом $\hat{a}_i$) . В этом случае отображение $\mu$ обладает следующим свойством:

$\mu(a_i) \supset Z_{n+1} - \{i\}$ ; общее, если $x \in \Gamma(J)$, то $\mu(x) \supset J'$

Это вытекает из того, что множества $M_i$ - см. формулы (2) и (5) - теперь образованы из точек $x$, для которых $i$-ая барицентрическая координата ( обозначим её $\xi(x)$ ) не убывает при отображении $f$ : $\xi_i(x) \leqslant \xi_i(f(x))$ ; очевидно, что $x \in \Gamma \Longleftrightarrow$

$\xi_i(x) = 0$ для $i \in J'$, так что $x \in \bigcap_{i \in J'} M_i$,

$\mu(x) \supset J'$. Продолжим отображения $\mu$ и $\nu$, полагая для новых вершин $\mu(b_i) = \{i\}$, $\nu(b_i) = i$.

**Лемма 5.** Пусть $\tau(J)$ - нормальный симплекс комплекса $K_1$, $J \neq \varphi$. Тогда соответствующий симплекс $\sigma(J) \in K$ является представительным.

**Доказательство.** Пусть $W \neq \varphi$ -множество вершин симплекса $\sigma(J)$, лежащего на грани $\Gamma(J)$ исходного симплекса $T$. Как уже показано, $\mu(w) \supset J'$, $w \in W$. Из того, что $\tau(J)$ -нормальный симплекс, а $\nu(b_j) = j$, следует, что $\nu(W) = J = Z_{n+1} - J'$. Окончательно имеем

$$Z_{n+1} \supset \bigcup_{i \in J} \mu(q_i) \supset \nu(W) \cup \mu(w_i) \supset J \cup J' = Z_{n+1} ,$$

где $w_* \in W$ - какая-нибудь вершина симплекса в $\sigma(J)$.

Поиск нормального симплекса в $K_1$ идёт путем индуктивного построения конечной последовательности различных $n$-мерных симплексов: $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k$. Выберем и зафиксируем число $j \in Z_{n+1}$. Будем добиваться выполнения следующих условий:

I) $\sigma_0 = (b_1, \ldots, b_{n+1})$, симплекс $\sigma_1 = (a_j, b_1, \ldots, b_{j-1}, b_{j+1}, \ldots, b_{n+1})$;

2) Каждый из симплексов $\sigma_q$ ($1 \leqslant q \leqslant n$) имеет с предыдущим симплексом общую $(n-1)$ - мерную грань.

3) При $1 \leqslant q < k$ в нумерации $\nu$ симплекса $\sigma_q$ участвуют все числа из $Z_{n+1}$, кроме одного, $j$-го,

$$\nu(W_q) = Z_{n+1} - \{j\} .$$

Здесь $W_q$ -множество вершин симплекса $\sigma_q$. Иными словами, ровно две вершины симплекса $\sigma_q$ занумерованы одинаково, некоторым числом - назовём его $\ell_q$, $\ell_q \neq j$.

4) Последний симплекс $\sigma_k$ - нормальный; формально и первый симплекс $\sigma_0$ обладает тем же свойством.

Опишем подробнее индукционный шаг, поскольку очевидно, что $\sigma_1$ удовлетворяет условию 3), если $\nu(a_1) \neq j$ ( это общий случай) или условию 4) ( если случится, что $\nu(a_1) = j$ ). Пусть

$q \geq 1$. При переходе от $\sigma_q$ и $\sigma_{q+1}$ одна из вершин $\sigma_q$ – будем обозначать её $w_q$ – заменяется другой вершиной из комплекса $K_1$, очевидно однозначно определенной в силу свойств псевдомногообразий; эту вершину обозначим $w'_{q+1}$. Геометрическая иллюстрация такова: от $\sigma_q$ переходим к $\sigma_{q+1}$, $w_q \in W_q$,

$w_{q+1} \in W'_{q+1}$; $\sigma_q$ и $\sigma_{q+1}$ имеют общую грань – $(n-1)$-мерный симплекс, не содержащий ни $w_q$, ни $w_{q+1}$. Мы можем считать, что $w'_1 = a_j$

Правило замены состоит в следующем: пусть $\sigma_q$ удовлетворяет условию 3); тогда для введенной на шаге $(q-1)$ вершины $w'_q$ имеем $\nu(w'_q) = \ell_q \neq j$. Найдем в $\sigma_q$ вершину $w_q \neq w'_q$ такую, что $\nu(w_q) = \nu(w'_q) = \ell_q$. Такая вершина $w_q$ найдется в силу условия 3). Теперь вершина $w_q$ выводится из симплекса и заменяется единственно возможной (в силу свойств псевдомногообразий) вершиной комплекса $K_1$; которую мы обозначим $w'_{q+1} \neq w_q$. Множество $W_{q+1}$ вершин комплекса $\sigma_{q+1}$ таково:

$$W_{q+1} = (W_q - \{w_q\}) \cup \{w'_{q+1}\}.$$

Если окажется, что $\nu(w'_{q+1}) = j$, то выполнено условие 4) и процесс закончен. Если $\nu(w'_{q+1}) \neq j$, то выполнено условие 3) и делается следующий шаг.

Так как в комплексе $K_1$ есть лишь конечное число симплексов, то для обоснования того, что наш процесс закончится в конечное число шагов, достаточно доказать, что отсутствуют в этом процессе отсутствуют циклы, то есть не существуют такие номера $\ell \geq 0$ и $m > 0$, что $\sigma_{\ell+m}$ совпадает с $\sigma_\ell$.

Очевидно, что симплекс $\sigma' \in K_1$ может следовать в описанном выше процессе за каким-нибудь симплексом $\sigma \in K_1$ лишь при выполнении следующего необходимого условия: $\sigma'$ содержит $(C_j)$ – представительные $(n-1)$ – мерные грани. Так как представительные симплексы содержат по одной такой грани, а остальные симплексы – 0 или 2 ( это –часть обычного доказательства леммы Шпернера, ср. выше доказательство леммы 3), то первые могут следовать в нашем процессе не более чем за одним, а остальные – не более чем за двумя симплексами из $K_1$.

Т е о р е м а 4. Индуктивное построение обладающее свойствами I) – 4), осуществимо и за конечное число шагов приводит к нормальному симплексу $\sigma_k \in K_1$, $\sigma_k \neq \sigma_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Осталось лишь показать отсутствие циклов. Пусть существует цикл: в последовательности $(\sigma_q)$ до некоторого номера $m$ все симплексы различны, а $\sigma_{m+1}$ совпадает с некоторым $\sigma_\ell$, $0 \le \ell < m$, очевидно $m \ge 1$. Тогда симплекс $\sigma_\ell$ при $\ell > 0$ должен иметь три различные ( $C_i$ )-представительные ( $n$ -I) – мерные грани, "связывающие" его с симплексами $\sigma_{\ell-1}$, $\sigma_{\ell+1}$ и $\sigma_m$, но это невозможно. Далее, $\ell$ не может равняться нулю, так как нормальный симплекс имеет единственную ( $C_j$ )- представительную $(n-1)$ – мерную грань, общую с $\sigma_1$; в частности, $\sigma_{m+1}$ не может совпадать с $\sigma_0$. Нормальный симплекс $\sigma_k = \tau(\mathcal{J}), \mathcal{J} \neq \phi$, по лемме 5 определяет представительный симплекс $\sigma(\mathcal{J})$ комплекса $K$, являющегося триангуляцией исходного симплекса $T$.

После того, как эта статья была сдана в печать, я познакомился с очень интересной заметкой Г.Куна [IO] ; его доклад на эту тему упоминается в информационной заметке [8] . Лемма 4 подобна основной теореме из [IO] , а алгоритм, связанный с нашей теоремой 4, в некотором смысле дуален алгоритму из [IO]. Вопросы, подобные рассмотренным выше в п: I-3, в заметке [IO] не рассматривались.

Автор благодарен коллективу семинара математико-экономического отделения Института математики СО АН СССР за полезные обсуждения.

## Литература


I. П.С.Александров, Комбинаторная топология, ГТТИ, М., 1947.
2. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах, физматгиз, М., 1959.
3. М.А.Красносельский. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, ГТТИ, М., 1956.
4. С.Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике, Изд-во "Мир", М., 1964.
5. Г.М.Вайникко, Автореферат докторск.диссертации, Воронеж, 1969.
6. Ч.Томпкинс. Прикладная комбинаторная математика (сборник статей под ред. Э.Беккенбаха), Изд-во "Мир", М., 1968.
7. H.Scarf. SIAM Journ. Appl. Math., v. I5, No 5, p. 1328 (1967). Econometrica, v. 35, No I (1967), pp. 50-70.
8. Б.Н.Пшеничный. УМН, т.24, вып.2 (1969 г.).
9. П.Хилтон, С.Уайли. Теория гомологий, М., 1964.
IO. H.Kuhn, Proc. Nat. Acad. Sc., 61, No 4, (1968) pp. I238-I242.


Поступила в редакцию
IO.IX. 1969 г.