УДК 512.25/26 + 513.88

О СХОДИМОСТИ МИНИМАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В НЕКОТОРЫХ ШКАЛАХ СТРОГИХ НОРМ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

В.А.Васильев

Излагаемые здесь результаты непосредственно примыкают к статье В.А.Булавского и Г.Ш.Рубинштейна [1], в которой с помощью введенного авторами понятия строго выпуклых предпорядков для некоторых выпуклых множеств M в арифметическом векторном пространстве R^n доказывается сходимость при $\rho \to 1$ и при $\rho \to +\infty$ элементов $x(M,\rho)$ из M, на которых достигают минимума нормы

$$\| x \|_\rho = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^\rho\right)^{1/\rho}, \quad \rho \in (1, +\infty).$$

В настоящей работе доказывается аналогичная сходимость минимальных элементов выпуклых множеств в пространстве $R^{m,n}$ прямоугольных матриц $x = [x_{ij}]$ $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$ в некоторых шкалах строгих норм.

Рассмотрим в $R^{m,n}$ следующие нормы

$$\| x \|_{\rho,q} = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} |x_{ij}|^\rho\right)^{q/\rho}\right)^{1/q}, \quad \rho, q \in (1, +\infty) \qquad (1)$$

и для каждого замкнутого выпуклого множества $M \subset R^{m,n}$ элемент, доставляющий минимум соответствующей норме, условимся обозначать через $x(M,\rho,q)$.

Ниже доказываются следующие утверждения.

Т е о р е м а 1. Пусть M – произвольный выпуклый многогранник в $R^{m,n}$, т.е. пересечение конечного числа замкнутых полупространств. Тогда при любом натуральном K минимальные элементы $x(M,\rho,K\rho)$ при $\rho \to +\infty$ сходятся.

Т е о р е м а 2. Пусть M – произвольное замкнутое выпуклое множество в $R^{m,n}$. Тогда, каковы бы ни были определенные на $[0,1]$ дважды непрерывно дифференцируемые в нуле функции $\alpha(t), \beta(t)$ такие, что

$\alpha(0)=\beta(0)=1$, $\alpha(t)>1$, $\beta(t)>1$ при $t\in(0,1)$, минимальные элементы $x(M,\alpha(t),\beta(t))$ при $t\to 0$ сходятся.

Помимо установления факта сходимости указанных минимальных элементов в работе дается характеристика предельных элементов в терминах строго выпуклых предпорядков.

При изложении мы будем использовать терминологию и обозначения, а также некоторые утверждения из цитированной работы [I].

Прежде всего покажем, что каково бы ни было натуральное κ, строго выпуклые предпорядки $\preccurlyeq_p^{(\kappa)}$, индуцируемые в $R^{m,n}$ нормами (I), где $q=\kappa p$, или что то же, функциями

$$f_p^{(\kappa)}(x)=\sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in \mathcal{I}}|x_{ij}|^p\Big)^\kappa,$$

$$\mathcal{I}=\{1,2,\ldots,m\},\quad J=\{1,2,\ldots,n\},\quad p\in(1,+\infty)$$

при $p\to+\infty$ сходятся. Для этого достаточно заметить что

$$f_p^{(\kappa)}(x)=\sum_{\alpha\in A^{(\kappa)}} y_\alpha^p, \tag{2}$$

где

$$A^{(\kappa)}=\{(i_1,i_2,\ldots,i_\kappa,j),\ j\in J,\ i_\ell\in\mathcal{I},\ \ell=1,2,\ldots,\kappa\},$$

$$y_\alpha=|x_{i_1j}\ x_{i_2j}\ \ldots\ x_{i_\kappa j}|,$$

и сослаться на соответствующий результат из §3 работы [I]. При этом предельный строго выпуклый предпорядок в $R^{m,n}$, который мы обозначим через $\preccurlyeq^{(\kappa)}$, допускает следующее описание.

Каждой матрице $x\in R^{m,n}$ сопоставим в R^N, где $N=n\cdot m^\kappa$, вектор

$$Z=(Z_1,Z_2,\ldots,Z_N),$$

компоненты которого получаются путем упорядочения по убыванию величин y_α из (2). Определенное таким образом отображение $f^{(\kappa)}: R^{m,n}\to R^N$ будет индуцировать интересующий нас предпорядок $\preccurlyeq^{(\kappa)}$ в $R^{m,n}$, если R^N считать лексикографически упорядоченным.

Заметим, что при любом натуральном κ отображение $f^{(\kappa)}$ удовлетворяет условиям леммы I из [I] и, следовательно, в каждом замкнутом выпуклом множестве $M\subset R^{m,n}$ существует минимальный элемент $x(M,\preccurlyeq^{(\kappa)})$ в предпорядке $\preccurlyeq^{(\kappa)}$.

Мы покажем, что в условиях теоремы I минимальные элементы $x(M,p,\kappa p)$ при $p\to+\infty$ сходятся к минимальному элементу $x(M,\preccurlyeq^{(\kappa)})$. Для этого нам потребуются два вспомогательных утверждения.

Пусть $\bar{x}=[\bar{x}_{ij}]$ – минимальный элемент выпуклого множества $M\subset R^{m,n}$ в предпорядке $\preccurlyeq^{(\kappa)}$, а $x=[x_{ij}]$ любой другой элемент этого множества. Тогда в силу определения предпорядка $\preccurlyeq^{(\kappa)}$

для векторов

$$f^{(K)}(\bar{x}) = (\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \ldots, \bar{Z}_N), \quad f^{(K)}(x) = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_N)$$

найдется $\tau \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ такое, что:

$$\bar{Z}_s = Z_s, \quad s = 1, 2, \ldots, \tau; \quad \bar{Z}_{\tau+1} < Z_{\tau+1} \tag{3}$$

Покажем, что при этом справедливы следующие утверждения.

Л е м м а 1. Если

$$\bar{Z}_s = |\bar{x}_{i_1^s j^s} \bar{x}_{i_2^s j^s} \ldots \bar{x}_{i_k^s j^s}|, \quad s = 1, 2, \ldots, \tau,$$

причем $\tau \geq 1$, то имеют место равенства

$$\bar{x}_{i_\ell^s j^s} = x_{i_\ell^s j^s}, \quad \ell = 1, 2, \ldots, K, \quad s = 1, 2, \ldots, \tau.$$

Л е м м а 2. Пусть, как и в предыдущей лемме, $\tau \geq 1$. Тогда в $R^{m,n}$ существует окрестность нуля U, такая, что, во-первых

$$(\bar{x} + U) \cap (x + U) = \varphi \tag{4}$$

и, во-вторых, при

$$f^{(K)}(\bar{x} + u) = (\bar{Z}_1^u, \bar{Z}_2^u, \ldots, \bar{Z}_N^u), \quad f^{(K)}(x + u) = (Z_1^u, Z_2^u, \ldots, Z_N^u)$$

для $u \in U$ имеют место неравенства

$$\bar{Z}_s^u \leq Z_s^u, \quad s = 1, 2, \ldots, \tau \tag{5}$$

$$\sup_{u \in U} \bar{Z}_{\tau+1}^u < \inf_{u \in U} Z_{\tau+1}^u . \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1. Какова бы ни была матрица $x = [x_{ij}]$ из $R^{m,n}$, компоненты

$$Z_s = |x_{i_1^s j^s} x_{i_2^s j^s} \ldots x_{i_k^s j^s}| \tag{7}$$

вектора

$$f^{(K)}(x) = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_N)$$

разбиваются на такие группы

$$Z_1 = Z_2 = \ldots = Z_{\tau_1},$$

$$Z_{\tau_1+1} = Z_{\tau_1+2} = \ldots = Z_{\tau_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z_{\tau_{t-1}+1} = Z_{\tau_{t-1}+2} = \ldots = Z_{\tau_t},$$

что

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_t = N,$$

$$Z_{\tau_1} > Z_{\tau_2} > \ldots > Z_{\tau_t} .$$

Для каждого $\tau = 1, 2, \ldots, t$ через $P_\tau(x)$ обозначим совокупность пар (i, j) таких, что каждый элемент x_{ij} матрицы x фигурирует в качестве множителя в представлении (7) некоторого эленента z_s из группы τ, но не фигурирует в представлении элементов предыдущих групп. При этом очевидно, что если $(i_0, i_0) \in P_\tau(x)$ и элемент $x_{i_0 j_0}$ используется при некотором $s \leqslant z_\tau$ для построения компоненты z_s, то возможны два случая :

а)Если при некотором i пара (i, j_0) принадлежит $\bigcup_{\tau' < \tau} P_{\tau'}(x)$, то в (7) все пары (i_ℓ^s, j^s), за исключением одной, совпадающей с (i_0, j_0), принадлежат $\bigcup_{\tau' < \tau} P_{\tau'}(x)$ и для них

$$|x_{i_0 j_0}| < |x_{i_\ell^s j^s}| .$$

б) В противном случае

$$|x_{i_1^s j^s}| = |x_{i_2^s j^s}| = \ldots = |x_{i_k^s j^s}| = |x_{i_0 j_0}| .$$

Из соотношений (3) следует, что фигурирующий в лемме элемент $\bar{z}_\tau$ является последним в одной из групп, на которые разбиваются компоненты вектора $f^{(k)}(\bar{x})$. Пусть эта группа имеет номер τ_0. Требуется доказать, что при всех $\tau = 1, 2, \ldots, \tau_0$ элементы $\bar{x}_{ij}$, отвечающие парам $(i, j) \in P_\tau(\bar{x})$, совпадают с соответствующими элементами x_{ij} матрицы x. Если б это было не так, то нашлись бы τ_1 и $(i_0, j_0) \in P_{\tau_1}(\bar{x})$ такие, что $1 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_0$ и при всех $\tau < \tau_1$, $(i, j) \in P_\tau(\bar{x})$ имеют место равенства

$$P_\tau(\bar{x}) = P_\tau(x), \quad \bar{x}_{ij} = x_{ij} , \tag{8}$$

но

$$\bar{x}_{i_0 j_0} \neq x_{i_0 j_0} . \tag{9}$$

Покажем, что это невозможно.

Для этого прежде всего заметим, что при всех $(i, j) \in P_{\tau_1}(\bar{x})$ должны выполняться неравенства

$$|x_{ij}| \leqslant |\bar{x}_{ij}| . \tag{10}$$

Действительно, пусть для $(i_1, j_1) \in P_{\tau_1}(\bar{x})$ выполняется противоположное неравенство

$$|\bar{x}_{i_1 j_1}| < |x_{i_1 j_1}| .$$

При этом для пары (i_1, j_1), как отмечалось, имеет место либо случай а), либо случай б). Нетрудно видеть, что и в том и в другом случае для соответствующего $s \leqslant z_{\tau_1}$

$$|\bar{x}_{i_1^s j^s} \bar{x}_{i_2^s j^s} \ldots \bar{x}_{i_k^s j^s}| < |x_{i_1^s j^s} x_{i_2^s j^s} \ldots x_{i_k^s j^s}|$$

Но это несовместимо с соотношениями (8) и (3).

Далее, из (8), (9) и (10) следует, что при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ для матрицы x^ε с элементами

$$x_{ij}^\varepsilon = \bar{x}_{ij} + \varepsilon (x_{ij} - \bar{x}_{ij})$$

справедливы соотношения

$$|x^{\varepsilon}_{ij}| \leq |\bar{x}_{ij}| \quad \text{при} \quad (i,j) \in \bigcup_{\tau' \leq \tau_1} P_{\tau'}(\bar{x}),$$

$$|x^{\varepsilon}_{i_0 j_0}| < |\bar{x}_{i_0 j_0}| .$$

Но тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$x^{\varepsilon} \prec^{(\kappa)} \bar{x},$$

что противоречит минимальности элемента $\bar{x}$ в множестве M. Полученное противоречие завершает доказательство леммы I.

Доказательство леммы 2. Для каждой матрицы $x \in R^{m,n}$ через $Q_{\tau}(x)$ обозначим совокупность пар (i,j) таких, что элементы x_{ij} фигурируют в представлении (7) компонент вектора $f^{(\kappa)}(x)$ при некоторых $s \leq \tau$. Учитывая, что компонента вектора $f^{(\kappa)}(\bar{x})$ с номером τ является последней в некоторой группе равных компонент, можно утверждать существование в $R^{m,n}$ окрестности нуля U, для которой

$$Q_{\tau}(\bar{x}+u) = Q_{\tau}(\bar{x}) \quad \text{при всех} \quad u \in U.$$

При этом, очевидно, можно считать, что U удовлетворяет условию (4) и, ввиду непрерывности отображения $f^{(\kappa)}$ –условию (6). Для завершения доказательства леммы 2 достаточно заметить, что на основании леммы I для всех $u \in U$ выполняются также соотношения (5), причем для $s < \tau$ имеют место равенства $\bar{z}^{u}_{s} = z^{u}_{s}$.

Доказательство теоремы I. Ввиду леммы 3 из [I] достаточно проверить справедливость теоремы для случая, когда M – афинное многообразие. Покажем, что в этом случае интересующие нас минимальные элементы $x(M, p, \kappa p)$ при $p \to +\infty$ сходятся к минимальному элементу $x(M, \prec^{(\kappa)})$ множества M в предпорядке $\prec^{(\kappa)}$.

Учитывая ограниченность множества указанных минимальных элементов и замкнутость M достаточно показать, что для любой точки $x \in M$, отличной от $\bar{x} = x(M, \prec^{(\kappa)})$, найдутся окрестность нуля U и $p_0 > 1$, при которых

$$(x+U) \cap M \cap \{x(M,p,\kappa p)\}_{p>p_0} = \varnothing . \qquad (\mathrm{II})$$

Пусть для точек $\bar{x}$ и отличной от неё точки $x \in M$

$$f^{(\kappa)}(\bar{x}) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_N), \quad f^{(\kappa)}(x) = (z_1, z_2, \dots, z_N).$$

Ввиду минимальности точки $\bar{x}$ в предпорядке $\prec^{(\kappa)}$ найдется $\tau < N$, такое, что

$$\bar{z}_{\tau+1} < z_{\tau+1}, \qquad \bar{z}_s = z_s \quad \text{при} \quad s \leq \tau .$$

Предположим вначале, что $\tau = 0$, т.е. $\bar{z}_1 < z_1$. Тогда, как нетрудно проверить, в качестве искомой окрестности нуля можно принять

$$\mathcal{U} = \left\{ y = [y_{ij}] : |y_{ij}| < \frac{z_1^{1/k} - \bar{z}_1^{1/k}}{2} \right\} ,$$

а ρ_0 выбрать так, чтобы при $\rho > \rho_0$

$$\| x \|_{\rho, k\rho} < \frac{z_1^{1/k} + \bar{z}_1^{1/k}}{2}$$

Существование такого ρ_0 вытекает из очевидного соотношения

$$\lim_{\rho \to +\infty} \| \bar{x} \|_{\rho, k\rho} = \max_{i,j} |\bar{x}_{ij}| = \bar{z}_1^{1/k} .$$

Допустим теперь, что $\tau \geq 1$. В этом случае в качестве искомой окрестности $\mathcal{U}$ может быть принята окрестность нуля, фигурирующая в лемме 2, а величина ρ_0 определяется из неравенства

$$N < \left(\frac{L}{\ell} \right)^{\rho_0} + \tau ,$$

где $\quad L = \inf_{u \in \mathcal{U}} z^{u}_{\tau+1} , \qquad \ell = \sup \bar{z}^{u}_{\tau+1} .$

При этом справедливость соотношения (11) следует из того, что при любом $\rho > \rho_0$ для всех $y \in \mathcal{U}$ таких, что $x + y \in M$, точки $\bar{x} + y$ также принадлежат M и имеют место неравенства

$$\| \bar{x} + y \|_{\rho, k\rho} < \| x + y \|_{\rho, k\rho} .$$

Это завершает доказательство теоремы I.

З а м е ч а н и е I. Как показывает пример, построенный в работе [I] для случая $R^{m,1}$, условие многогранности замкнутого выпуклого множества M в теореме I существенно.

З а м е ч а н и е 2. При различных натуральных k точки $x(M, \rho, k\rho)$ при $\rho \to +\infty$ сходятся, вообще говоря, к различным элементам многогранника M. Это следует из неэквивалентности предпорядков $\preccurlyeq^{(k)}$ и $\preccurlyeq^{(k')}$ при $k \neq k'$.

Переходя к доказательству теоремы 2 покажем, что при любых функциях α и β, удовлетворяющих условиям теоремы, строго выпуклые предпорядки $\preccurlyeq_t^{\alpha,\beta}$, индуцируемые в $R^{m,n}$ нормами (I), где $p = \alpha(t)$ и $q = \beta(t)$ или, что то же, функциями

$$f_t^{\alpha,\beta}(x) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} |x_{ij}|^{\alpha(t)} \right)^{\gamma(t)}, \quad \gamma(t) = \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} .$$

при $t \to 0$ сходятся. При этом предельный строго выпуклый предпорядок $\preccurlyeq^{\alpha,\beta}$ индуцируется следующим отображением пространства $R^{m,n}$ в лексикографически упорядоченное пространство R^2:

$$f^{\alpha,\beta}(x) = (z_1, z_2) ,$$

где

$$z_1 = \sum_{j\in J} \sum_{i\in J} |x_{ij}| ,$$

$$z_2 = \gamma'(0) \sum_{j\in J} \Big(\sum_{i\in J} |x_{ij}|\Big) \ln\Big(\sum_{i\in J} |x_{ij}|\Big) + \alpha'(0) \sum_{j\in J} \sum_{i\in J} |x_{ij}| \ln |x_{ij}| .$$

Для доказательства сходимости указанных предпорядков к предпорядку $\preccurlyeq^{\alpha,\beta}$ можно воспользоваться следующей модификацией признака сходимости предпорядков, доказанного в [I] (стр. I2).

Пусть направленное семейство совершенных предпорядков $\preccurlyeq_\alpha$ из R_{φ_α} и совершенный предпорядок $\preccurlyeq$, определенные на одном и том же выпуклом множестве M , удовлетворяют условию

(!!) Каковы бы ни были $x, y \in M$ такие, что $x \prec y$, начиная с некоторого α справедливо соотношение $x \prec_\alpha y$.

Тогда предпорядки $\preccurlyeq_\alpha$ сходятся к предпорядку $\preccurlyeq$.

Далее, как и в предыдущем случае, предельный предпорядок $\preccurlyeq^{\alpha,\beta}$, очевидно, удовлетворяет условиям леммы I из [I] и потому в любом непустом замкнутом выпуклом множестве $M \subset R^{m,n}$ имеется минимальный элемент $x(M, \preccurlyeq^{\alpha,\beta})$.

Мы утверждаем, что в условиях теоремы 2 минимальные элементы $x(M, \alpha(t), \beta(t))$ при $t \to 0$ сходятся к минимальному элементу $x(M, \preccurlyeq^{\alpha,\beta})$. Для этого достаточно сослаться на следующую лемму.

Лемма 3. Если $\bar{x}$ - минимальный элемент выпуклого множества $M \subset R^{m,n}$ в предпорядке $\preccurlyeq^{\alpha,\beta}$, то какова бы ни была отличная от $\bar{x}$ точка $\bar{y} \in M$, найдется окрестность S точки $\bar{y}$ и $t_0 \in (0,1)$ такие, что при всех $y \in S \cap M$ и $t \in (0, t_0)$

$$\| \bar{x} \|_{\alpha(t),\beta(t)} < \| y \|_{\alpha(t),\beta(t)} .$$

Доказательство этой леммы использует непрерывность и строгую выпуклость отображения $f^{\alpha,\beta}$ и проводится аналогично доказательству леммы 2 из [I].

В заключение приношу глубокую благодарность Г.Ш.Рубинштейну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

I. В.А.Булавский и Г.Ш.Рубинштейн. Об одном обобщении понятия строго выпуклой функции. Настоящий сборник, стр. 7 -20 .

Поступила в редакцию
IO.IX. 1969 г.