УДК 519.95

В.И. ХОХЛЮК

О КОНЕЧНОСТИ МОДИФИКАЦИИ МАРТИНА АЛГОРИТМА I ГОМОРИ

В работе [2] Мартин предлагает способ построения отсечения, однако при этом не указываются условия, при которых алгоритм, использующий это отсечение, будет конечным. Ниже сформулированы достаточные условия, гарантирующие конечность рассматриваемой модификации алгоритма I Гомори.

В этой работе рассматривается полностью целочисленная задача линейного программирования, которая состоит в нахождении максимума линейной функции

$$x_0 = a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{0j}(-y_j)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le a_{i0} \qquad (i=1,\dots,m),$$

$$y_j \ge 0 \qquad (j=1,\dots,n),$$

$$y_j \equiv 0 \pmod 1 \qquad (j=1,\dots,n).$$

Последнее условие есть условие целочисленности. Будем считать, что все параметры a_{ij} – целые числа.

Вводя неотрицательные слабые переменные x_i $(i=1,\dots,m)$ и для удобства изложения добавляя тривиальные соотношения $y_j = -1(-y_j)$ $(j=1,\dots,n)$, условия задачи можно записать в виде системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} x_0 &= a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{0j}(-y_j), \\ x_i &= a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-y_j) \qquad (i=1,\dots,m), \\ y_s &= \sum_{j=1}^{n} -\delta_{sj}(-y_j) \qquad (s=1,\dots,n), \end{aligned} \tag{1}$$

где $$\delta_{sj} = \begin{cases} 1, & j = s, \\ 0, & j \neq s. \end{cases}$$

Таким образом, все переменные задачи выражаются через независимые (небазисные) переменные.

Обозначая переменные y_j через x_{m+j} $(j=1,\dots,n)$, запишем систему (I) в матричной форме:

$$X = A^{\circ} T^{\circ}, \tag{2}$$

где $X = (x_0, x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n})^T$, $T^{\circ} = (1, -t_1, \dots, -t_n)^T = (1, -x_{m+1}, \dots, -x_{m+n})^T$, а A° есть матрица всех постоянных, находящихся в правой части системы (I). Применив к матрице A° лексикографический двойственный симплексный метод, получим последовательность матриц A^K ($K = 0,1,2,\dots$). Столбцы матрицы A^K будем обозначать через α_j^K ($j = 0,1,\dots,n$), а саму матрицу A^K будем также называть симплексной таблицей. Такая форма записи задачи позволяет сохранить порядок переменных неизменным в течение всего вычислительного процесса.

Рассмотрим уравнение

$$x = a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j (-t_j), \tag{3}$$

соответствующее какой-нибудь строке с дробными элементами из симплексной таблицы A^K, опустив при этом индексы строки и матрицы. Для этого уравнения строим отсечение Гомори

$$S_1 = -f_0 - \sum_{j=1}^{n} f_j (-t_j), \tag{4}$$

где $f_j = a_j - [a_j]$ есть дробная часть коэффициента a_j ($j = 0,1,\dots,n$). Выбирая строку, соответствующую (4), в качестве центральной строки, выполняем преобразование с центральным элементом $-f_{j_0} \neq 0$ ($1 \leq j_0 \leq n$) только для одной строки, элементами которой являются коэффициенты рассматриваемого уравнения (3). В результате получаем уравнение

$$x = a_0' + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} a_j' (-t_j) + a_{j_0}' (-S_1), \tag{5}$$

где $a_{j_0}' = a_{j_0} / f_{j_0}$, $a_j' = a_j - (a_{j_0} / f_{j_0}) f_j$ $(j = 0,1,\dots,n;\ j \neq j_0)$.

Аналогичным образом строится второе отсечение Гомори

$$S_2 = -f_0' - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} f_j' (-t_j) - f_{j_0}' (-S_1), \tag{6}$$

исходя из уравнения (5); далее выполняется преобразование с центральным элементом $-f_{j_0}' \neq 0$ только для одной строки, элементами которой являются коэффициенты уравнения (5). В результате получается уравнение

$$x = a_0^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} a_j^2(-t_j) + a_{j_0}^2(-S_2) \qquad (7)$$

и т.д. В течение этого процесса номер j_0 центрального столбца не изменяется.

Покажем, что через конечное число ℓ таких шагов можно получить уравнение

$$x = a_0^\ell + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} a_j^\ell(-t_j) + a_{j_0}^\ell(-S_\ell) \qquad (8)$$

с целым элементом $a_{j_0}^\ell$. Это означает, что $f_{j_0}^\ell = 0$, и процесс заканчивается.

Для $j = 0, 1, \ldots, n$ представим коэффициенты рассматриваемых уравнений в виде:

$$a_j = n_j/D,\ f_j = r_j/D,\ a_j^\rho = n_j^\rho / D_\rho,\ f_j^\rho = r_j^\rho / D_\rho \quad (\rho = 1, \ldots, \ell),$$

где r_j, r_j^ρ, D, D_ρ – целые неотрицательные числа; n_j, n_j^ρ могут быть целыми числами любого знака; а $D = D^K > 0$ – общий знаменатель всех элементов матрицы A^K. Величина D^K представляет собой целое число и равна абсолютной величине произведения K предыдущих центральных элементов.

Целое число r_{j_0} является остатком от деления n_{j_0} на D. После первого преобразования $D_1 = |-f_{j_0} \cdot D| = r_{j_0} < D$. Числитель $r_{j_0}^1$ есть остаток от деления n_{j_0} на D_1. После второго преобразования $D_2 = |-f_{j_0}^1 \cdot D_1| = r_{j_0}^1 < D_1$. Таким образом, получается убывающая последовательность целых положительных чисел $D > D_1 > D_2 > \ldots$, ограниченная снизу числом 1. Такая последовательность может содержать только конечное число членов

Так как неотрицательное целочисленное решение удовлетворяет исходному уравнению (3) и уравнению (8), то оно должно удовлетворять уравнению

$$S_\ell = (a_0 - a_0^\ell)/-a_{j_0}^\ell + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} ((a_j - a_j^\ell)/-a_{j_0}^\ell)(-t_j) + (a_{j_0}/-a_{j_0}^\ell)(-t_{j_0}), \qquad (9)$$

которое получается при вычитании (8) из (3) после явного выражения переменной S_ℓ. Уравнение (9) представляет собой отсечение Мартина. Обозначая переменную S_ℓ через Z, а коэффициенты уравнения (9) – через λ_j, перепишем отсечение Мартина в виде:

$$Z = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(-t_j),$$

где переменная Z принимает целое неотрицательное значение для любого неотрицательного целочисленного решения исходной задачи.

Легко показать, что эти коэффициенты обладают такими свойствами:

(а) если a_j - целое число, то $\lambda_j = 0$;

(б) если a_j - дробное число, то $\lambda_j < 0$;

(в) $\lambda_{j_0} = -D_\ell / D$.

При $\ell = 1$ отсечение Мартина превращается в отсечение Гомори.

Алгоритм. Пусть исходная матрица A^0 является полностью целочисленной, лексикографически двойственно допустимой и определяет непустое ограниченное многогранное множество.

1) Применяя к матрице A^0 лексикографический двойственный симплексный метод, решаем обычную задачу линейного программирования. Будем считать, что её оптимальное решение не является целочисленным.

2) Пусть $a^k_{i_0 0}$ есть первая сверху нецелочисленная компонента оптимального решения $(a^k_{00}, a^k_{10}, \ldots, a^k_{m+n,0})^T$. Выбирая строку i_0 в качестве исходной, строим отсечение Мартина

$$z_1 = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (-t^k_j)$$

и выполняем преобразование симплексной таблицы с центральным элементом λ_{j_0}, где столбец j_0 определяется из соотношения:

$$(1/-f^k_{i_0 j_0})\alpha^k_{j_0} = \max_{\substack{-f^k_{i_0 j}<0 \\ j \neq 0}} (1/-f^k_{i_0 j})\alpha^k_j .$$

Сравнение вектор-столбцов производится в лексикографическом смысле.

Если в преобразованной матрице A^{k+1} окажутся дробные числа, выбираем какую-нибудь строку с дробными элементами в качестве исходной, строим второе отсечение Мартина и выполняем преобразование симплексной таблицы. Так поступаем до тех пор, пока матрица не станет полностью целочисленной.

Процесс построения целочисленной симплексной таблицы периодически (например, с периодом 10 или 100) заменяется одним преобразованием её, в котором центральной строкой служит отсечение Гомори вида (4).

3) Для проведения повторной максимизации к матрице $A^{k+\tau}$, полученной в результате τ преобразований, применяем лексикографический двойственный симплексный метод, состоящий из двух этапов, так как симплексная таблица может потерять как прямую, так и двойственную допустимость. Если новое оптимальное решение не яв-

ляется целочисленным, переходим к 2).

Описанный алгоритм, использующий отсечение Мартина, через конечное число итераций (преобразований симплексной таблицы) либо приводит к оптимальному целочисленному решению исходной задачи, либо указывает на то, что целочисленная задача линейного программирования несовместна.

Доказательство конечности рассматриваемого алгоритма совпадает с доказательством конечности алгоритма I Гомори [I], если доказать строгое убывание в лексикографическом смысле оптимальных решений $\alpha_*^{K_0}, \alpha_*^{K_1}, \alpha_*^{K_2}, \ldots$ задачи линейного программирования.

Покажем убывание решений. Пусть симплексная таблица A^K соответствует оптимальному решению некоторой задачи линейного программирования. Новая задача линейного программирования, полученная в результате τ преобразований, порождаемых τ отсечениями Мартина, имеет полностью целочисленную симплексную таблицу $A^{K+\tau}$, которая может потерять как прямую, так и двойственную допустимость. Эта новая задача эквивалентна задаче линейного программирования, которая задается матрицей A'^K. Симплексная таблица A'^K получается из матрицы A^K присоединением снизу к A^K строк, соответствующих переменным $z_1, \ldots, z_\tau$, выраженным через небазисные переменные $t_1^K, \ldots, t_n^K$ (z_i является слабой переменной i -го отсечения Мартина). Матрица A'^K является двойственно допустимой, и применение лексикографического двойственного симплексного метода даст оптимальное решение этой задачи, которое строго меньше в лексикографическом смысле, чем $\alpha_*'^K$. Вследствие единственности решения двух эквивалентных задач линейного программирования лексикографическим двойственным симплексным методом, имеет место соотношение: $\alpha_*^{K+\tau+q}$ лексикографически строго меньше α_*^K для некоторого $q \geq 1$.

Литература

1. R.E.Gomory, An algorithm for integer solutions to linear programs. Recent Advances Math.Program. New York-San Francisco - Toronto - London, McGraw-Hill Book. Co.,Inc.,1963, 269-302 (РЖМат ,1965, 3В ,1947).

2. G.T.Martin, An accelerated Euclidean algorithm for integer linear programming. Recent Advances Math.Program.,New York - San Francisco - Toronto - London, McGraw-Hill Book Co.,Inc., 1963, 311-317 (РЖМат ,1965, 3В, 267)

Поступила в редакцию
15 ноября 1968 г.