УДК 517.512.6.

М.М. АНДРЕЕВА

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ МНОГОЧЛЕНАМИ

Пусть в пространстве $C(E)$ непрерывных функций f, определенных на компакте E, выделено некоторое множество D. Под задачей наилучшего равномерного приближения данной функции $f \overline{\in} D$ понимается разыскание функции $\varphi \in D$, для которой достигает минимума величина

$$\| f - \varphi \| = \max_{e \in E} | f(e) - \varphi(e) | .$$

Задача наилучшего равномерного приближения непрерывных функций одной вещественной переменной многочленами на $E = [a, b]$ изучалась еще П.Л.Чебышевым, который показал, что при

$$D = \{ P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \}$$

поставленная задача имеет единственное решение для любой функции $f \in C(E)$.

В настоящей заметке изучаются характеристики множества решений задачи наилучшего приближения функций двух вещественных переменных многочленами. Пусть

$$E = \{ (x, y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d \},$$

$$D = \{ P_n(x, y) = \sum_{0 \le i+j \le n} a_{ij} x^i y^j \}.$$

В этом случае единственность решения для любой непрерывной функции f можно гарантировать, очевидно, лишь при $n = 0$. Ниже показывается, что при $n = 1, 2$ для любой непрерывной функции f решение представимо в виде:

$$P_n(x, y) = Q_n(x, y) + R_k(x, y)\, S_{n-k}(x, y), \tag{1}$$

где $0 \leq K < n$, $Q_n(x,y)$ и $S_{n-K}(x,y)$ – фиксированные многочлены n-й и $(n-K)$-й степени, а $R_K(x,y)$ – многочлен K-й степени, коэффициенты которого являются параметрами. При $n=3$ для любой непрерывной функции f решение представимо либо в виде (I), либо же в виде:

$$P_3(x,y) = Q_3(x,y) + \lambda_1 R_3^{(1)}(x,y) + \lambda_2 R_3^{(2)}(x,y), \qquad (2)$$

где $Q_3(x,y)$, $R_3^{(1)}(x,y)$, $R_3^{(2)}(x,y)$ – фиксированные многочлены, а λ_1, λ_2 – параметры; при этом $R_3^{(1)}(x,y)$ и $R_3^{(2)}(x,y)$ – взаимно простые.

В дальнейшем для определения размерности множества решений задачи используем следующую теорему [I].

ТЕОРЕМА. Множество наилучших приближений для каждой функции $f(x,y) \in C(E)$ является не более чем τ-мерным тогда и только тогда, когда каждые $\tau+1$ линейно независимых функций из N-мерного множества D имеют в E не более $N-\tau-1$ общих нулей.

Пусть $n=1$, т.е. функцию $f(x,y) \in C$ приближаем многочленами $P_1(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y$. При этом $N=3$.

Две линейно независимые функции

$$a_1 + b_1 x + c_1 y \quad \text{и} \quad a_2 + b_2 x + c_2 y$$

имеют не более одного общего корня, так как две непараллельные прямые пересекаются в одной точке. Следовательно, при $n=1$ для любой функции $f(x,y)$ имеем $\tau = 1$, и множество всех многочленов наилучшего приближения первой степени можно описать при помощи формулы (I), где $n=1$, $K=0$.

Положим теперь $n=2$. Тогда размерность N подпространства D равна 6. Приближаем многочленами второй степени.

$$P_2(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2.$$

Так как три линейно независимые кривые второго порядка $P_2^{(i)}(x,y) = 0$, $i = 1,2,3$, могут иметь общую прямую, а следовательно, и более трех общих корней, то $\tau \geq 3$. Четыре же линейно независимые кривые $P_2^{(i)}(x,y) = 0$ не могут иметь трех общих корней. Через три точки, даже если они лежат на одной прямой, можно провести только три линейно независимые кривые второго порядка. Действительно, три различные точки (x_i, y_i) для кривой второго порядка задают три линейно независимые связи, так как соответствующие им векторы

$$(1, x_i, y_i, x_i y_i, x_i^2, y_i^2), \quad i = 1, 2, 3,$$

линейно независимы. Поэтому система кривых второго порядка, проходящих через три общие точки, содержит только три линейно независимые кривые (см. [2] , стр. 75-77). Отсюда следует , что четыре линейно независимые кривые второго порядка могут иметь не более двух общих точек. Поэтому в случае приближения многочленами второй степени для любой функции $f(x,y)$ множество наилучших приближений имеет размерность не больше 3 и состоит из многочленов $P_2(x,y)$, определяемых формулой:

$$P_2(x,y) = Q_2(x,y) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i S_2^{(i)}(x,y). \tag{3}$$

Здесь $Q_2(x,y)$ и $S_2(x,y)$, $i = 1,2,3$, - фиксированные многочлены второй степени, а λ_1 , λ_2 , λ_3 - параметры.

Множество M_2 точек максимального уклонения многочлена наилучшего приближения $P_2(x,y)$ от $f(x,y)$ должно содержать множество точек (x_i, y_i) , на которых векторы

$$Z = (1, x_i, y_i, x_i y_i, x_i^2, y_i^2)$$

линейно зависимы.

Легко проверить, что три вектора Z_i для трех различных точек (x_i, y_i) всегда линейно независимы.

Четыре вектора Z_i линейно зависимы, если точки (x_i, y_i) , $i = 1,2,3,4$, лежат на одной прямой. В самом деле, поскольку (x_i, y_i), $i = 1,2,3,4$, удовлетворяют уравнению прямой

$$a + bx + cy = 0 ,$$

то линейная зависимость векторов Z_i следует из линейной зависимости векторов ($1, x_i, x_i^2$) или ($1, y_i, y_i^2$).

Наоборот, если векторы Z_i, $i = 1,2,3,4$, линейно зависимы, то точки (x_i, y_i) лежат на трех линейно независимых кривых второго порядка. Но через четыре точки можно провести три линейно независимые кривые второго порядка лишь в том случае, если точки лежат на одной прямой.

Пять векторов Z_i , соответствующих пяти различным точкам, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой, всегда линейно независимы. Допустим, что они линейно зависимы. Через четыре точки можно провести две линейно независимые кривые второго порядка. Пятая точка тоже будет принадлежать этим кривым, так как соответствующий ей вектор Z_5 линейно зависим с первыми четырьмя векторами. Но две кривые второго порядка, имеющие пять общих точек, либо имеют общую компоненту, либо совпадают (см. [2] , стр. 74). Если они имеют общую компоненту (прямую), то на этой прямой может лежать не более трех точек, а оставшиеся две точки являются общими для двух других прямых. Но через две точки можно провести только одну прямую. Следовательно, вторая прямая тоже является общей. Таким образом, через эти пять точек можно провести только одну кривую второго порядка. Полученное противоречие доказывает, что векторы z_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, линейно независимы.

Для шести точек (x_i, y_i), никакие четыре из которых не лежат на одной прямой, векторы z_i, $i = 1, 2, \dots, 6$, линейно зависимы, если эти точки лежат на кривой второго порядка. Если при этом кривая второго порядка приводимая, т.е. распадается на две прямые, то на каждой из них будет лежать по три точки.

Для семи точек (x_i, y_i) векторы z_i, $i = 1, 2, \dots, 7$, всегда линейно зависимы.

Поскольку в точках множества M_2 многочлены $S_2^{(i)}(x,y)$, $i=1, 2, 3$, участвующие в формуле (3), должны обращаться в ноль, то, ввиду сказанного, возможны следующие три случая, которые мы будем предполагать взаимно исключающими.

1) Если множество M_2 содержит четыре точки, лежащие на одной прямой, то последняя является общей компонентой для кривых $S_2^{(i)}(x, y) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Поэтому многочлены $S_2^{(i)}(x, y)$ имеют общий множитель, и формулу (3) можно записать в виде:

$$P_2(x, y) = Q_2(x, y) + (t_1 + t_2 x + t_3 y) S_1(x, y) =$$
$$= Q_2(x, y) + R_1(x, y) S_1(x, y),$$

где $Q_2(x, y)$ и $S_1(x, y)$ – фиксированные многочлены второй и первой степени соответственно, а $R_1(x, y)$ – многочлен первой степени, коэффициенты которого служат параметрами.

2) Если множество M_2 содержит шесть точек, лежащих на кривой второго порядка, то многочлены $S_2^{(i)}(x, y)$, $i = 1, 2, 3$, совпадают, так как кривые второго порядка $S_2^{(i)}(x, y) = 0$ имеют шесть общих точек (см. [2] , стр. 74). При этом они будут приводимые, если три точки лежат на одной прямой. В этом случае формула (3) сводится к виду

$$P_2(x, y) = Q_2(x, y) + t\, S_2(x, y),$$

где $Q_2(x, y)$ и $S_2(x, y)$ – фиксированные многочлены второй степени, а t – параметр.

3) Множество M_2 содержит семь точек. По предположению никакие четыре точки из M_2 не лежат на одной прямой и никакие шесть точек множества M_2 не лежат на кривой второго порядка. Тогда многочлены $S_2^{(i)}(x, y) \equiv 0$, $i = 1, 2, 3$, так как кри-

вые второго порядка $S_2^{(i)}(x,y)=0$, $i=1,2,3$, должны проходить через точки множества M_2. Из формулы (3) получим

$$P_2(x,y)=Q_2(x,y),$$

здесь $Q_2(x,y)$ – фиксированный многочлен второй степени.

Теперь возьмем $n=3$ и будем приближать функции $f(x,y)\in C$ многочленами третьей степени

$$Q_3(x,y)=a_1+a_2x+a_3y+a_4xy+a_5x^2+a_6y^2+a_7x^2y+a_8xy^2+a_9x^3+a_{10}y^3.$$

Размерность N подпространства D при этом равна 10.

Поскольку шесть линейно независимых кривых третьего порядка могут иметь общую прямую, то множество наилучших приближений имеет в этом случае размерность $z\geq 6$ и состоит из многочленов наилучшего приближения $P_3(x,y)$, представимых формулой

$$P_3(x,y)=Q_3(x,y)+\sum_{i=1}^{z}\lambda_i S_3^{(i)}(x,y), \qquad (4)$$

где $Q_3(x,y)$ и $S_3^{(i)}(x,y)$, $i=1,2,\ldots,z$, $z\geq 6$, – фиксированные многочлены третьей степени, а λ_i – параметры.

Подобно тому, как это делалось для $n=2$, определим множество точек (x_i, y_i), на которых векторы

$$g_i=(1,x_i,y_i,x_iy_i,x_i^2,y_i^2,y_ix_i^2,x_iy_i^2,x_i^3,y_i^3)$$

линейно зависимы.

1) Четыре вектора g_i для различных точек (x_i, y_i) $i=1,2,3,4$, всегда линейно независимы. Для точек (x_i,y_i) $i=1,2,3,4$, не лежащих на одной прямой, справедливость утверждения следует из линейной независимости векторов z_i, $i=1,2,3,4$. Если же точки (x_i,y_i), $i=1,2,3,4$, лежат на одной прямой, то по крайней мере либо x_i, $i=1,2,3,4$, либо y_i, $i=1,2,3,4$, попарно различны. Тогда линейная независимость векторов g_i, $i=1,2,3,4$, очевидна.

2) Если пять точек (x_i, y_i) лежат на одной прямой, то векторы g_i, $i=1,2,\ldots,5$, линейно зависимы. Действительно, так как (x_i,y_i), $i=1,2,\ldots,5$, удовлетворяют уравнению прямой

$$a+bx+cy=0,$$

то линейная зависимость векторов ($1,x_i,x_i^2,x_i^3$) или ($1,y_i,y_i^2,y_i^3$) влечет линейную зависимость векторов g_i, $i=1,2,\ldots,5$. И обратно, если пять векторов g_i линейно зависимы, то точки (x_i, y_i), $i=1,2,\ldots,5$, лежат на одной прямой. Из линейной зависимости векторов g_i, $i=1,2,\ldots,5$, следует линейная зависимость векторов

$$(1, x_i, y_i, x_i y_i, x_i^2, y_i^2), \quad i=1,2,\ldots,5,$$

а последние линейно зависимы только тогда, когда четыре точки лежат на одной прямой. Поскольку $\sum_{i=1}^{5} \xi_i x_i = 0$ и $\sum_{i=1}^{5} \xi_i y_i = 0$, причём все коэффициенты линейной зависимости ξ_i, $i=1,2,\ldots,5$, отличны от нуля, то и пятая точка будет лежать на этой прямой.

3) Если восемь точек (x_i, y_i) лежат на кривой второго порядка, то соответствующие им векторы g_i, $i=1,2,\ldots,8$, линейно зависимы.

Действительно, так как точки (x_i, y_i), $i=1,2,\ldots,8$, принадлежат кривой второго порядка, то либо

$$y_i^2 = a_1 x_i^2 + b_1 x_i y_i + c_1 x_i + d_1 y_i + e_1,$$

либо

$$x_i^2 = a_2 y_i^2 + b_2 x_i y_i + c_2 x_i + d_2 y_i + e_2,$$

либо

$$x_i y_i = a_3 x_i + b_3 y_i + c_3 .$$

И тогда линейная зависимость векторов g_i, $i=1,2,\ldots,8$, следует из линейной зависимости либо векторов

$$(1, x_i, x_i^2, x_i^3, y_i, x_i y_i, x_i^2 y_i), \quad i=1,2,\ldots,8,$$

либо

$$(1, x_i, y_i, x_i y_i, y_i^2, x_i y_i^2, y_i^3), \quad i=1,2,\ldots,8,$$

либо

$$(1, x_i, x_i^2, x_i^3, y_i, y_i^2, y_i^3), \quad i=1,2,\ldots,8 .$$

Семь же точек (x_i, y_i), никакие пять из которых не лежат на прямой, могут лежать не более чем на одной кривой второго порядка, а этого для линейной зависимости векторов g_i, $i=1,2,\ldots,7$, недостаточно. То же самое и для шести точек.

4) Если девять точек лежат на двух кривых третьего порядка, то векторы g_i, $i = 1,2,\ldots, 9$, линейно зависимы. Это доказывается так же, как в п. .).

Если ℓ точек лежат на одной или нескольких кривых достаточно низкого порядка, то они не могут налагать независимых линейных связей на кривые данного порядка n (см. [2], стр. 75–77).Так как случаи, когда точки лежат на кривых второго порядка уже учтены, то достаточно рассмотреть различные варианты, когда точки лежат на прямых. Для кривой третьего порядка получается при этом, что девять точек не всегда задают линейно независимые связи и в этом случае через девять точек можно провести две линейно независимые кривые третьего порядка. Восемь же точек, если они не лежат на кривой второго порядка, налагают восемь независимых линейных связей на кривые третьего порядка. Поэтому через восемь точек можно провести только две кривые третьего порядка. А в этом случае линейной зависимости векторов g_i не будет. Тем более это верно для меньшего числа точек (семь и шесть).

5) Если десять точек (x_i, y_i) лежат на кривой третьего порядка, то векторы g_i, $i = 1,2,\dots,10$, линейно зависимы.

6) Одиннадцать векторов g_i всегда линейно зависимы.

Множество M_3 точек максимального уклонения многочлена наилучшего приближения $P_3(x, y)$ от функции $f(x, y)$ должно содержать множество точек (x_i, y_i), на которых векторы g_i линейно зависимы. В связи с этим далее рассмотрим возможные варианты расположения точек из множества M_3 на плоских кривых не выше третьего порядка, подразумевая каждый раз, что выделенный случай исключается из следующих. Заметим, что в точках множества M_3 многочлены $S_3^{(i)}(x, y)$, $i = 1,2,\dots, r$, $r \geq 6$, из формулы (4) должны обращаться в ноль.

Если множество M_3 имеет пять точек на одной прямой, или восемь точек на кривой второго порядка, или десять точек на кривой третьего порядка, то кривые $S_3^{(i)}(x, y) = 0$, $i = 1,2,\dots, r, r \geq 6$, содержат эту кривую (первого, второго или третьего порядков, соответственно каждому из перечисленных случаев) в качестве общей компоненты, и многочлены $S_3^{(i)}(x, y)$, $i = 1,2,\dots, r$, имеют общий множитель. Из формулы (4) получаем в случае пяти точек на прямой

$$P_3(x, y) = Q_3(x, y) + R_2(x, y) \cdot S_1(x, y),$$

в случае восьми точек на кривой второго порядка

$$P_3(x, y) = Q_3(x, y) + R_1(x, y) \cdot S_2(x, y)$$

и в случае десяти точек на кривой третьего порядка

$$P_3(x, y) = Q_3(x, y) + t\, S_3(x, y).$$

Здесь t – параметр, $Q_3(x, y)$ и $S_3(x, y)$ – фиксированные многочлены третьей степени; $S_1(x, y)$, $S_2(x, y)$ – фиксированные многочлены первой и второй степени соответственно; $R_1(x, y)$, $R_2(x, y)$ – многочлены соответственно первой и второй степени, коэффициенты которых являются параметрами.

Пусть множество M_3 содержит одиннадцать точек. Так как кривые третьего порядка $S_3^{(i)}(x, y) = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, должны проходить через эти одиннадцать точек, то либо этот случай сводится к одному из предыдущих, либо $S_3^{(i)}(x, y) = 0$, $i = 1,2, \dots, r$, $r \geq 6$.

Формула (4) принимает вид

$$P_3(x,y) = Q_3(x,y),$$

где $Q_3(x,y)$ – фиксированный многочлен третьей степени.

Если же множество M_3 содержит девять точек, которые лежат на двух кривых третьего порядка, то среди многочленов $S_3^{(i)}(x,y)$, $i = 1,2,\dots,r$, могут быть два линейно независимых, не имеющих общих компонент. В этом случае множество наилучших приближений функции $f(x,y) \in C$ многочленами третьей степени описывается формулой (2).

Литература

1. Г.Ш.Рубинштейн. Об одном методе исследования выпуклых множеств. ДАН, т.102, 1955, стр. 451-455.

2. Р.Уокер. Алгебраические кривые. ИЛ, 1952.

Поступила в редакцию
10 декабря 1968 г.