Оптимальное планирование
1968 г. выпуск 11

УДК 512.25/26+519.3:330.115

ЗАДАЧА КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И ЕЁ ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ

В.В. ТИТОВ

Перед производственным участком, имеющим N единиц (или групп) оборудования,ставится задача выполнения некоторого объема работ по обработке M деталей (партий деталей) в кратчайшие сроки. Технологический процесс обработки для каждой детали различен, т.е. различна последовательность прохождения деталей по станкам, строго закрепленным за определенными операциями по обработке соответствующих деталей. В процессе обработки возможен возврат какой-то детали к одному и тому же станку. Перерыв в работе по какой-либо операции недопустим.

Будем обозначать через a_{ik} длительность k-й ($k=1,2,\ldots,K_i$) операции над i-й ($i=1,2,\ldots,M$) деталью, а через $\mathcal{J}(i,k)$ – номер станка, на котором выполняется эта операция.

Под операцией будем понимать совокупность трех индексов "ikj".

Под совокупной длительностью производственного цикла $T_ц$ будем понимать длительность производственного цикла от момента запуска первой из деталей набора на первую операцию оoработки до момента окончания последней операции обработки последней детали.

Выполнение данного объема работ в кратчайший срок возможно лишь при условии построения такого подетально-кооперационного план-графика порядка запуска и движения деталей по операциям, которому соответствует минимальное значение $T_ц = T_{ц\,min}$
В этом случае мы будем иметь более полную загрузку оборудования, а размер незавершенного производства будет минимальным.

Определение $T_{ц\,min}$ связано с большими вычислительными трудностями. В настоящее время нет еще простого метода решения задачи календарного планирования. Как указано в работе

[1] построение хорошего алгоритма, повидимому, в принципе не - возможно. Поэтому представляет интерес любой алгоритм, который давал бы решение задачи календарного планирования (пусть не оптимальное, но близкое к нему) был бы прост, требовал бы небольшого количества вычислений (желательно, чтобы количество вычислений было бы пропорционально размерности задачи, а не росло по экспоненте с увеличением размерности задачи).

Мы будем рассматривать алгоритм решения поставленной задачи, который обеспечивает получение некоторого допустимого план-графика обработки деталей. (Как показали практические расчеты для некоторых задач были получены план-графики с $T_ц = T_{ц\,min}$)

Пусть для каждого станка данного производственного участка известно t_j - время окончания предыдущих работ, т.е. известно время, с которого j - й станок может принять участие в выполнении данной работы.

Зная, с какого момента времени станки освободились от предыдущей работы, определяем возможное начало работ τ_i^1 для любой детали, т.е. $\tau_i^1 = t_{j(i,1)}$, если первая операция над i - й деталью проводится на j - м станке, причём индекс "1" указывает на то, что возможное начало работ над i - й деталью определено перед первым этапом решения задачи.

Если на j - м станке не ведется обработка ни одной детали по первой операции, то ясно, что с момента времени t_j j - й станок работать не будет.

Пусть R_1 - множество индексов j, определяющих операции "$i1j$". Если $j \in R_1$, то j - й станок может начать работать с момента времени $t_j^1 = t_j$. Если $j \in R_1$, то

$$t_j^1 = max\{t_j; \min_i(\sum_{k=1}^{k_i^j-1} a_{ik} + \tau_i^1)\},$$

где $k_i^j = min\{k : j = \mathcal{J}(i,k)\}$, причём если i - я деталь ни при одной операции не обрабатывается на j -м станке, то полагаем

$$min(\sum_{k=1}^{k_i^j-1} a_{ik} + \tau_i^1) = 0.$$

Таким образом, $\sum_{j=1}^{N}(t_j^1 - t_j)$ - минимальное время неизбежных простоев по всем станкам между двумя различными работами. В ходе решения задачи время вынужденного простоя j -го станка мы не будем учитывать.

Станку с номером "j" предстоит выполнить работу общей трудоёмкостью

$$A_j^1 = \sum_{\substack{i,k \\ j=\mathcal{J}(i,k)}} a_{ik}\ .$$

Трудоёмкость i - й детали по всем операциям будет

$$B_i^1=\sum_{k=1}^{K_i} a_{ik} .$$

Перед первым этапом решения задачи определяем T_u^1 - оценку снизу минимально возможной длительности производственного цикла. Меньше T_u^1 значение T_u быть не может.

$$T_u^1=T_1-t_н ,$$

где

$$t_н=\min\{t_j^1\} ; \quad T_1=\max_{i,j}\{\tau_i^1+B_i^1 ; t_j^0+A_j^1\} .$$

Так как значение $t_н$ фиксировано ,то решение задачи сводится к определению минимального срока выполнения всего объема работ.

Мы полагаем, что работа по обработке данного набора деталей может быть закончена к моменту времени T_1 .

Всего мы имеем $s=\sum_{i=1}^{M} K_i$ операций.Каждая операция должна быть внесена в план-график, поэтому все решение задачи разобьем на s этапов. На каждом этапе будем вносить по одной операции в план-график. Каждая зафиксированная нами в план-графике операция "ikj" должна утвердить свое место в нем количественной оценкой полезности её включения в график в тот или иной момент времени. Полезность будем определять с точки зрения максимальной загрузки станков и скорейшего выполнения работ.

Полезность операции "ikj" в тот или иной момент времени будем определять из оценки станка, на котором проводится эта операция, и оценки соответствующей детали.

Оценки станков определим следующим образом. Станку "j" предстоит выполнить работу общей трудоёмкостью A_j . Эту работу мы предполагаем выполнить за время

$$T_1-t_j^1-t_j^0 ,$$

где

$$t_j^0=\min_{i=1,2,\dots,M}\left\{\sum_{l_i^j+1}^{K_i} a_{ik}\right\} , \quad l_i^j=\max\{k: j=J(i,k)\} ,$$

$$l_i^j\neq K_i .$$

Для тех "i" , которые не обрабатываются на j-м станке , $\sum_{l_i^j+1}^{K_i} a_{ik}$ не считается.

Через t_j^0 мы обозначили минимальное время опережения окончания работ на j -ом станке по сравнению с предполагаемыми временем окончания работы T_1 на всех станках, так как ясно, что станки, на которых не проводятся работы по последним операциям, закончат работу раньше времени T_1. Отсюда первоначальную оценку станка определим как

$$C_j^1 = \frac{A_j^1}{T_1 - t_j^1 - t_j^0}, \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

т.е. как отношение трудоёмкости работы, которую предстоит выполнить на данном станке, ко времени, которое дается на выполнение этой работы.

Оценку детали определим как отношение трудоёмкости детали по всем операциям ко времени, за которое предстоит выполнить все операции данной детали, т.е.

$$P_i^1 = \frac{B_i^1}{T_1 - \tau_i^1}, \quad i = 1, 2, \ldots, M.$$

Будем по очереди пробовать ставить первые операции деталей на соответствующие станки. Пусть мы занесли в график первую операцию i - й детали на станок $j = \mathcal{J}(i,1)$, который может начать работу с момента времени t_j^1, тем самым "загружаем" станок на время a_{i1}. Перед началом выполнения этой операции станок имел оценку C_j^1, а после окончания этой операции оценка изменится и станет равной

$$C_j^{1_i} = \frac{A_j^1 - a_{i1}}{T_1 - t_j^1 - t_j^0 - a_{i1}},$$

где индекс 1_i означает, что оценка станка найдена на первом этапе решения задачи при условной попытке включить операцию i -ой детали в план-график.

Таким образом, мы уже можем оценить полезность включения данной операции в план-график относительно загрузки j - го станка этой операцией. Полезность определим так:

$$a_{i1}(C_j^1 - C_j^{1_i}).$$

Оцененная таким образом полезность будет способствовать в первую очередь загрузке наиболее лимитирующих станков.

Перед условным включением данной операции "$i1j$" в план-график i - ая деталь имела оценку P_i^1, а затем её оценка будет следующей:

$$P_i^{1_i} = \frac{B_i^1 - a_{i1}}{T_1 - \tau_i^1 - a_{i1}}.$$

Полезность выполнения операции " $i1j$ " в данный период относительно выполнения работ по i - ой детали положим равной

$$a_{i1}(P_i^1+P_i^{1i}).$$

Такая оценка полезности будет способствовать обработке в первую очередь деталей, имеющих максимальную длительность обработки B_i .

Общая полезность выполнения операции " $i1j$ " положим равной

$$a_{i1}(C_j^1+C_j^{1i}+P_i^1+P_i^{1i}).$$

Таким образом, мы условно "загрузили" работой j - й станок с момента времени t_j^1 до $t_j^1+a_{i1}$. Но с момента времени t_j^1 могли бы обрабатываться и другие детали. Следовательно, в этом случае будет иметь место сдвиг начала обработки каких-то деталей либо перерыв в обработке некоторых деталей между операциями. Для m -ой детали ($m=1,2,\ldots,M$) величина сдвига начала обработки или перерыва в работе определяется так:

$$\ell_m^{1i}=\max_{m\neq i}\{0;\, t_j^1+a_{i1}-\sum_{k=1}^{K_m^j-1}a_{mk}-\tau_m^1\},$$

где $K_m^j=\min\{k: j=\mathcal{J}(m,k)\}$, если $K_m^j=1$, то $\sum_{k=1}^{K_m^j-1}a_{mk}=0$; если m - я деталь не обрабатывается на j станке, то $\ell_m^{1i}=0$.

Если $\ell_m^{1i}=0$ для всех $m\neq i$, то с момента времени t_j^1 ($j=\mathcal{J}(i,1)$) на j - й станок не будет претендовать ни одна операция, кроме первой операции над i - й деталью. В этом случае мы окончательно фиксируем операцию " $i1j$ " в план-графике, и на этом первый этап решения задачи будет закончен. Отсюда ясно, что для сокращения вычислительной процедуры алгоритма нужно перед определением оценок станков и деталей убедиться в том, что хотя бы одно значение $\ell_m^{1i}>0$. Если это так, то полученная информация сохраняется для дальнейших расчетов, в противном случае сразу переходим ко второму этапу решения задачи.

Возвращаемся к оценкам деталей. В результате сдвига начала работы по m - й детали или перерыва в работе над нею ее оценка увеличится и будет определена так:

$$P_m^{t_i}=\frac{A_m^t}{T_t-\tau_m^t-\ell_m^{\tau_i}}.$$

Пусть все $P_m^{t_i}\leq 1$. Тогда мы имеем нежелательные последствия, которые могут быть оценены количественно следую - щим образом:

$$\sum_{m\neq i, m=1}^{M}\ell_m^{t_i}(P_m^t+P_m^{t_i}).$$

Сдвиги начал обработки деталей или перерывы в работе между операциями этих деталей могут отодвинуть возможное начало работ на каком-то n-м станке ($n=1,2,\ldots,N$) на момент времени

$$t_n^{t_i}=\min_{m\neq i}\{\sum_{\kappa=1}^{K_m^n-1}a_{m\kappa}+\tau_m^{t_i}+\ell_m^{t_i}\},\ n\neq\mathcal{J}(i,1),$$

где $K_m^n=\min\{\kappa: n=\mathcal{J}(m,\kappa)\}$. Если m-я деталь не оораоатывается на j-м станке, то и расчет $t_n^{t_i}$ не ведется относительно детали " m ".

Если мы будем иметь $t_n^{t_i}>t_n^t$, то неизбежен простой n-го станка на величину

$$h_n^{t_i}=t_n^{t_i}-t_n^t.$$

Простой n - го станка вызовет увеличение оценки станка, так как объем работ, который предстоит выполнить станку, остался прежним, а время, за которое этот объем работ должен быть выполнен, сократилось, т.е. имеем новую оценку станка:

$$C_n^{t_i}=\frac{A_n^t}{T_t-t_n^t-t_n^0-h_n^{t_i}}.$$

Пусть $C_n^{t_i}\leq 1$. Определяем в этом случае отрицательную полезность включения операции " $i1j$ " в план-график :

$$\sum_{n=1}^{N}h_n^{t_i}(C_n^t+C_n^{t_i}).$$

Таким образом, на данном этапе решения задачи включение операции " $i1j$ " в план-график оценивается следующей величиной:

$$z_i^t=a_{i1}(P_i^t+P_i^{t_i}+C_j^t+C_j^{t_i})-\sum_{\substack{n=1\\ n\neq j}}^{N}h_n^{t_i}(C_n^t+C_n^{t_i})-\sum_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{M}\ell_m^{t_i}(P_m^t+P_m^{t_i}),$$

где z_i^t - функция полезности.

Среди полученных значений z_i^t находим максимальное, а операцию над соответствующей деталью заносим окончательно в план-график. На этом первый этап решения задачи будет закончен.

Теперь вернемся к определению оценок $\rho_m^{t_i}$ и $c_n^{t_i}$. Мы полагали, что $\rho_m^{t_i}<1$ и $c_n^{t_i}<1$. Однако $c_n^{t_i}$ и $\rho_m^{t_i}$ могут принимать значения, большие единицы. Рассмотрим такие случаи. Что означает оценка $\rho_m^{t_i}>1$ Это значит, что поставив операцию "iij" в план-график, мы сдвигаем возможное начало работы над m - й деталью. При этом оказывается, что время B_m^t, которое необходимо для выполнения всех операций над m - й деталью больше того времени $T_t-\tau_m^t-\ell_m^{t_i}$, за которое мы предполагали выполнить все операции над m-й деталью. Следовательно, для того, чтобы выполнить работу над m-й деталью, мы должны отодвинуть срок выполнения всего объема работ на величину

$$\delta_m^{t_i}=B_m^t-\left(T_t-\tau_m^t-\ell_m^{t_i}\right).$$

Ясно, что включать в план- график на данном этапе решения задачи такую операцию, которая увеличивает срок выполнения работ, не имеет смысла. Для такой операции значение z_i^t не вычисляется.

Переходим к оценкам $c_n^{t_i}$. Если $c_n^{t_i}>1$, то операция, условно поставленная в план-график, вызывает простой n-го станка, в результате чего он не успеет выполнить предназначенный ему объем работ A_n в указанный срок $T_t-t_n^t-t_n^o-h_n^{t_i}$, т.е. срок выполнения всего объема работ T_t нужно увеличить на значение

$$\varepsilon_n^{t_i}=A_n^t-\left(T_t-t_n^t-t_n^o-h_n^{t_i}\right).$$

Поэтому для тех операций, которые отодвигают срок выполнения всего объема работ, значения z_i^t не вычисляются, и вопрос об их включении в план-график на данном этапе решения задачи снимается.

Если мы нашли, что при включении в план-график операции любой детали срок выполнения T_t всех работ увеличивается, то нужно отобрать из всех рассматриваемых операций такую, которая отодвигала бы срок выполнения всех работ на минимальную величину. Положим, что операция "iij" условно занесена в план-график, при этом сдвигается возможное начало работ (или имеет место перерыв в работе) над m -ой деталью на величину $\ell_m^{t_i}$, в результате чего мы имеем $\delta_m^{t_i}>0$. Далее, n- й станок будет простаивать $h_n^{t_i}$ единиц времени, отчего имеем

$\varepsilon_n^{l_i}>0$. Ясно,что в итоге значение T_1 нужно увеличить на

$$\delta^{l_i}=\max_{m,n}\{\delta_m^{l_i},\varepsilon_n^{l_i}\}.$$

Если $\delta^{l_i}>0$ для всех i ,то находим

$$\delta^1=\min_i\{\delta^{l_i}\},$$

а соответствующую этому значению операцию включаем в план - график. Если значению δ^1 будет соответствовать несколько операций, то выбираем опирацию над той деталью, для которой значение B_i^1 наибольшее. На этом первый этап решения задачи заканчивается.

Таким образом, операция " ilj " может быть занесена в план-график, если при выполнении одного из трех условий:

I. Включение данной операции в план-график не дает сдвигов начал обработки (или перерывов в обработке) других деталей.

2.Включение данной операции в план-график обеспечивает минимальное увеличение условно намеченного срока выполнения всех работ на данном этапе решения задачи.

3. Для детали и ее операции получили наибольшее значение z_i^1 (среди тех деталей, для которых значение z_i^1 вычислялось).

Как было сказано выше, для решения задачи необходимо $S=\sum_{i=1}^{M}K_i$ этапов. Мы рассмотрели только первый этап, который почти не отличается от последующих, за исключением подготовки исходной информации.

Вычислительная процедура на последующих этапах решения задачи упрощается тем, что часть уже рассчитанных данных с предыдущего этапа передается на последующий. Например, на второй этап решения задачи с первого будет передана следующая информация при условии ,что была зафиксирована в план- графике операция "ilj". Значения $\tau_{m\neq l}^{l_i}$ будут соответствовать значениям τ_m^1 ;

$$t_{n\neq j}^{l_i}\to t_n^2 ;\qquad \tau_i^2=\tau_i^1+a_{i1} ;\qquad t_j^2=t_j^1+a_{il} ;$$

$$P_{m\neq i}^1 \text{ и } P_i^{l_i}\to P_i^2 ;\qquad c_{n\neq j}^{l_i} \text{ и } c_j^{l_i}\to c_j^2 ;\qquad B_i^1=B_i^2-a_{il} ;$$

$$B_{m\neq i}^1=B_m^2 ;\ A_j^2=A_j^1-a_{il} \underset{j=\mathcal{J}(il)}{;}\ A_n^1=A_n^2 ;\ T_2=T_1 ,\qquad \text{если } \delta^1=0 ;$$

если $\delta^1>0$, то $T_2=T_1+\delta^1$, а значения P_i^2 и c_j^2 пересчитываются. Значение t_j^0 остается постоянным для всех этапов решения задачи.

На первый взгляд, данный алгоритм решения задачи календарного планирования кажется очень трудоёмким, с точки зрения количества вычислений. Однако много уже подготовленной информации передается с одного этапа на другой. Значительно сокращают вычислительную процедуру условия I и 2 . Оценки $P_m^{s_i} > 1$ и $C_n^{s_i} > 1$ ($s = 1, 2, \ldots, S$) вообще снимают вопрос о включении операций над соответствующими деталями в план-график на s - м этапе решения задачи. Все это позволяет вручную решать по данному алгоритму небольшие задачи (например, 5 - 10 деталей и 5 - 10 станков). Как показали практические расчеты, использование данного алгоритма может обеспечить получение хороших результатов. При реализации данного алгоритма на ЭВМ возможен расчет больших задач календарного планирования.

Литература

I. Г.П. Акилов. Об одном алгоритме в задаче календарного планирования. Математическое программирование. "Наука". М., 1966.

Поступила в редакцию
15 апреля 1968 г.