УДК 51.330.115

РАВНОВЕСНЫЕ ПАРЫ В НЕКОТОРЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИКИ

Э.О. РАПОПОРТ, А.М. РУБИНОВ

В настоящей заметке рассматривается непрерывная динамическая модель производства и описывается асимптотическое поведение оптимальных (в интегральном смысле) траекторий этой модели. Вводится понятие равновесной пары и оценивается близость некоторых интегральных функционалов на оптимальных траекториях к функционалам на равновесных парах.

1°. Опишем прежде всего рассматриваемую модель.

Каждому неотрицательному вещественному числу t поставим в соответствие линейное пространство $\mathfrak{X}_t$. Будем считать, что пространство $\mathfrak{X}_t\,(t>0)$ частично упорядочено выступающим выпуклым конусом K_t. Через $\mathfrak{X}_t^*$ обозначим пространство, алгебраически сопряженное к $\mathfrak{X}_t$, через K_t^* – конус, сопряженный к K_t. Будем считать, как обычно, что $\mathfrak{X}_t^*$ полуупорядочено с помощью конуса K_t^*.

Пусть $x_0 \in \mathfrak{X}_0$. Будем говорить, что нам задана траектория X, исходящая из x_0, если каждому $t>0$ поставлен в соответствие вектор $X(t) \in K_t$, причем $X(0)=x_0$.

Множество M, являющееся подмножеством множества всех траекторий, исходящих из x_0, назовем пучком траекторий.

Рассматривается модель $\mathfrak{M}$, определяемая системой пространств $\{\mathfrak{X}\}_{t\geq 0}$, системой конусов $\{K_t\}_{t\geq 0}$, вектором $x_0 \in K_0$ и пучком траекторий M.

Траекторию $X \in M$ будем в дальнейшем называть допустимой.

2°. Приведем ряд важных для дальнейшего определений.

Ценами (в момент t) назовем функционал $f \in K_t^*$.

Пусть $f_0 \in K_0^*$. Будем говорить, что нам задана функция цен

F, если каждому $t \geq 0$ поставлен в соответствие функционал $F(t) \in K_t^*$, причем $F(0)=f_0$. Функцию цен F назовем допустимой, если для любой допустимой траектории X функция ψ, определенная на $[0,\infty)$ по формуле:

$$\psi(t)=(F(t),x(t))$$

суммируема (по мере Лебега) на промежутке $[0,T]$ при любом $T>0$ и, кроме того, $(f_0,x_0)>0$.

Пусть F - допустимая функция цен, $T>0$. Рассмотрим функционал $\mathcal{J}_T^F$, определенный на пучке траекторий M по формуле:

$$\mathcal{J}_T^F(X)=c_0+\int_0^T \psi\,dt, \quad c_0=(f_0,x_0).$$

Допустимую траекторию $\bar{X}$ назовем $\mathcal{J}_T^F$ -оптимальной, если

$$\mathcal{J}_T^F(\bar{X})=\max_{X\in M}\mathcal{J}_T^F(X).$$

Пусть F - допустимая функция цен, X -допустимая траектория. Темпом роста пары (F,X) назовем функцию β_X^F, определенную на $[0,\infty)$ по формуле:

$$\beta_X^F(t)=\psi(t)/\mathcal{J}_t^F(X).$$

Нетрудно заметить, что

$$\beta_X^F(t)=\frac{d}{dt}\ln\mathcal{J}_t^F(X).$$

Пару $(\bar{F},\bar{X})$, где $\bar{F}$ - допустимая функция цен, $\bar{X}$ - допустимая траектория, назовем равновесной, если почти при всех $t\geq 0$ для любой допустимой траектории X

$$\beta_X^{\bar{F}}(t)\leq\beta_{\bar{X}}^{\bar{F}}(t).$$

Иными словами, пара $(\bar{F},\bar{X})$ равновесна, если темп роста её почти при всех t не меньше темпа роста пары $(\bar{F},X)$ при любой $X\in M$.

Приведем пример модели, в которой существует равновесная пара. Модель определяется следующим образом:

а) $\mathcal{X}_t=R^2$ при всех $t\geq 0$;

б) K_t -конус векторов пространства R^2 с неотрицательными компонентами;

в) $x_0=(x_0^1,x_0^2)$, где $x_0^1=x_0^2=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) Пучок допустимых траекторий определяется соотношениями:

$$x^1(t)=e^{\alpha t}\sin\varphi(t),$$
$$x^2(t)=e^{\alpha t}\cos\varphi(t),$$

где $\alpha>0$, $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируемая функция, причем $\varphi(0)=\frac{\pi}{4}$, и $\varphi'(t)<0$ при $t\geq 0$.

Легко видеть, что пара $(\overline{F},\overline{X})$, где

$$\overline{X}(t)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\lambda t},\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\lambda t}\right), \quad \overline{F}(t)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

равновесна.

3°. Зафиксируем две функции цен $\overline{F}$ и $\widetilde{F}$, которые связаны соотношением:

$$K'\overline{F}(t)\leq\widetilde{F}(t)\leq K''\overline{F}(t) \qquad (t>0), \tag{I}$$

где K' и K'' – некоторые положительные числа. Заметим, что величина

$$\gamma=\sup\frac{K'}{K''}, \quad 0<\gamma\leq 1 \tag{2}$$

(где супремум берется по всем $K'>0,\ K''>0$, для которых справедливо (I)) характеризует в некотором смысле степень близости функций $\widetilde{F}$ и $\overline{F}$. Переходя к пределу, можно считать, что $K'=\gamma K''$.

Рассмотрим связь между оптимальными значениями функционалов $\mathcal{J}_T^{\overline{F}}$ и $\mathcal{J}_T^{\widetilde{F}}$ и темпами роста соответствующих пар.

ЛЕММА I. Пусть функции цен $\widetilde{F}$ и $\overline{F}$ удовлетворяют условию (I), $\widetilde{X}$ – $\mathcal{J}_T^{\widetilde{F}}$ оптимальная траектория, $\overline{X}$ – $\mathcal{J}_T^{\overline{F}}$ – оптимальная траектория. Тогда

$$K'\leq\frac{\mathcal{J}_T^{\widetilde{F}}(\widetilde{X})}{\mathcal{J}_T^{\overline{F}}(\overline{X})}\leq K''.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получается сразу из определения $\mathcal{J}_T^{F}$ –оптимальной траектории.

Справедливо и подобное соотношение между темпами роста.

ЛЕММА 2. Пусть пары $(\overline{F},\overline{X})$ и $(\widetilde{F},\widetilde{X})$ таковы, что при $t\leq T$ $(\overline{F}(t),\overline{X}(t))\geq(\overline{F}(t),\widetilde{X}(t))$ и $(\widetilde{F}(t),\widetilde{X}(t))\geq(\widetilde{F}(t),\overline{X}(t))$ и выполнено условие (I). Тогда

$$\gamma\leq\frac{\beta_{\widetilde{X}}^{\widetilde{F}}(t)}{\beta_{\overline{X}}^{\overline{F}}(t)}\leq\frac{1}{\gamma},$$

где γ определена по формуле (2).

СЛЕДСТВИЕ I. Если $(\overline{F},\overline{X})$ – равновесная пара и выполнены условия леммы 2, то справедливы неравенства:

$$\gamma^2\beta_{\overline{X}}^{\overline{F}}(t)\leq\beta_{\widetilde{X}}^{\widetilde{F}}(t)\leq\beta_{\overline{X}}^{\overline{F}}(t).$$

Действительно,

$$\beta_{\widetilde{X}}^{\widetilde{F}}=\frac{(\widetilde{F},\widetilde{X})}{c_0+\int\limits_0^t(F,X)dt}>\frac{\frac{1}{\gamma^t}(\widetilde{F},\widetilde{X})}{\frac{1}{\gamma^t}(c_0+\int\limits_0^t(\widetilde{F},\widetilde{X})dt)}=\gamma\beta_{\widetilde{X}}^{\widetilde{F}}>\gamma^2\beta_{\widetilde{X}}^{\widetilde{F}} \quad .$$

Второе неравенство следует из равновесности пары $(\bar{F},\bar{X})$.

4^{0}. Пусть $(\bar{F},\bar{X})$ -равновесная пара с темпом роста $\bar{\beta}(t)$, допустимая функция цен $\widetilde{F}$ удовлетворяет условию (I) и траектория $\widetilde{X}$ - $\mathcal{J}_T^F$ - оптимальная.

Рассмотрим множества $E_1(T,\varepsilon)$ и $E_2(T,\varepsilon)$, определяемые следующим образом:

$$E_1(T,\varepsilon)=\{t : t\in[0,T],(1-\varepsilon)\bar{\beta}(t)\geq\beta_{\widetilde{X}}^{\widetilde{F}}(t)\} \,, \qquad (3)$$
$$E_2(T,\varepsilon)=[0,T]\setminus E_1(T,\varepsilon) \,.$$

Иногда в дальнейшем эти множества будут обозначаться просто через E_1 и E_2 соответственно.

ЛЕММА 3. Множество $E_1(T,\varepsilon)$ таково, что.

$$\varepsilon\int\limits_{E_1}\bar{\beta}(t)dt\leq\ln 1/\gamma \;\cdot$$

Действительно, из определения множеств E_1 и E_2 следует, что

$$\beta_{\widetilde{X}}^{\widetilde{F}}(t)\leq(1-\varepsilon)\bar{\beta}(t) \qquad ,t\in E_1 \,,$$

$$\beta_{\widetilde{X}}^{\widetilde{F}}(t)\leq\bar{\beta}(t) \qquad ,t\in E_2 \,.$$

Утверждение леммы легко получить, интегрируя эти неравенства и используя $\mathcal{J}_T^F$ - оптимальность траектории $\widetilde{X}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если существует положительная постоянная d такая, что $\bar{\beta}(t)\geq d$ почти при всех $t>0$, то найдется постоянная c , не зависящая от T такая, что

$$mes\,E_1(T,\varepsilon)\leq c \,.$$

Этот результат можно интерпретировать как аналог теоремы о магистрали (см. например, [I]) . Заметим, что если $\bar{\beta}(t)\geq d>0$ то экономика развивается не медленнее, чем экспонента.

ТЕОРЕМА .Пусть $(\bar{F},\bar{X})$ -равновесная пара, $\widetilde{F}$ - удовлетворяет условию(I), $\widetilde{X}$ - $\mathcal{J}_T^{\widetilde{F}}$ - оптимальная траектория, T -

такое, что $\mathcal{J}_T^F(\widetilde{X}) > 1/\gamma$. Тогда

$$\left(\ln \frac{\mathcal{J}_T^F(\widetilde{X})}{C_0}\right)^{1/2} - \left(\ln 1/\gamma\right)^{1/2} \le \left(\ln \frac{\mathcal{J}_T^F(\widetilde{X})}{C_0}\right) \le \left(\ln \frac{\mathcal{J}_T^F(\overline{X})}{C_0}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное $\varepsilon \in (0,1)$ и рассмотрим множества $E_1(T,\varepsilon)$ и $E_2(T,\varepsilon)$, определенные по формулам (3). Имеем:

$$\beta_{\widetilde{X}}^F(t) \le (1-\varepsilon)\bar{\beta}(t) \qquad, t \in E_1;$$

$$(1-\varepsilon)\bar{\beta}(t) \le \beta_{\widetilde{X}}^F(t) \le \bar{\beta}(t) \qquad, t \in E_2.$$

Интегрируя эти неравенства, получаем:

$$\int_{E_1} \beta_{\widetilde{X}}^F(t)dt \le (1-\varepsilon)\int_{E_1} \bar{\beta}(t)dt,$$

$$(1-\varepsilon)\int_{E_2} \bar{\beta}(t)dt \le \int_{E_2} \beta_{\widetilde{X}}^F(t)dt \le \int_{E_2} \bar{\beta}(t)dt.$$

Откуда

$$(1-\varepsilon)\int_{E_2} \bar{\beta}(t)dt \le \int_0^T \beta_{\widetilde{X}}^F(t)dt \le \int_0^T \bar{\beta}(t)dt$$

или

$$(1-\varepsilon)\int_0^T \bar{\beta}(t)dt - (1-\varepsilon)\int_{E_1} \bar{\beta}(t)dt \le \int_0^T \beta_{\widetilde{X}}^F(t)dt \le \int_0^T \bar{\beta}(t)dt.$$

Но по лемме 3

$$\int_{E_1} \bar{\beta}(t)dt \le 1/\varepsilon \ln 1/\gamma.$$

Поэтому

$$(1-\varepsilon)\int_0^T \bar{\beta}(t)dt - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\ln 1/\gamma \le \int_0^T \beta_{\widetilde{X}}^F(t)dt \le \int_0^T \bar{\beta}(t)dt$$

или, используя определение функции $\beta_X^F(t)$,

$$(1-\varepsilon)\ln \frac{\mathcal{J}_T^F(\overline{X})}{C_0} - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\ln \frac{1}{\gamma} \le \ln \frac{\mathcal{J}_T^F(\widetilde{X})}{C_0} \le \ln \frac{\mathcal{J}_T^F(\overline{X})}{C_0}. \qquad (4)$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(\varepsilon) = (1-\varepsilon)\ln \frac{\mathcal{J}_T^F(\overline{X})}{C_0} - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\ln \frac{1}{\gamma}.$$

Нетрудно проверить, что её максимум достигается при

$$\varepsilon_0 = \left(\frac{\ln 1/\gamma}{\ln \mathcal{J}_T^F(\overline{X})}\right)^{1/2},$$

из условия теоремы $0 < \varepsilon_0 < 1$ и

$$\varphi(\varepsilon_0) = \left(\sqrt{\ln \frac{\mathcal{J}_T^F(\overline{X})}{C_0}} - \sqrt{\ln \frac{1}{\gamma}}\right)^2.$$

Неравенства (4) справедливы при любом $\varepsilon \in (0,1)$. При $\varepsilon = \varepsilon_0$ получим

$$\left(\sqrt{\ln \frac{\mathcal{I}_T^F(\overline{X})}{C_0}} - \sqrt{\ln \frac{1}{\gamma}}\right)^2 \leq \ln \frac{\mathcal{I}_T^F(\overline{X})}{C_0} \leq \ln \frac{\mathcal{I}_T^F(\overline{X})}{C_0}$$

или

$$\sqrt{\ln \frac{\mathcal{I}_T^F(\overline{X})}{C_0}} - \sqrt{\ln \frac{1}{\gamma}} \leq \sqrt{\ln \frac{\mathcal{I}_T^F(\overline{X})}{C_0}} \leq \sqrt{\ln \frac{\mathcal{I}_T^F(\overline{X})}{C_0}},$$

что и требовалось доказать.

Литература

I. А.М. Рубинов. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий в одной математической модели производства.- Оптимальное планирование, № 9, 87-III, Новосибирск, Издательство Наука", Сибирское отделение, I967.

Поступила в редакцию
I0 декабря I967 г.