

УДК 512.25/26 + 519.3:330.115

**ОБ ОДНОМ ПРОЦЕССЕ КООРДИНАЦИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ
НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ОТРАСЛИ****В.Д. МАРШАК**

Одной из важнейших проблем планирования и управления народным хозяйством является проблема составления оптимального перспективного плана.

В соответствии с современным представлением о теории оптимального планирования составление народнохозяйственного плана есть процесс составления и использования взаимосвязанной системы экономико-математических моделей различных подразделений народного хозяйства. Построение моделей отдельных народнохозяйственных подразделений (отрасли, экономического района, предприятия и т.д.) должно осуществляться специалистами данного подразделения, что соответствует существующей практике планирования.

В связи с такой постановкой проблемы оптимального планирования встает задача организации взаимосвязи всей системы моделей.

Исходя из практики планирования в нашей стране, а также анализа имеющихся методов решения большого числа задач математического программирования, следует, что в такой системе моделей должна существовать синтетическая модель народнохозяйственного планирования. На основе данной крупноагрегированной модели народнохозяйственного планирования должно осуществляться определение предварительных наметок народнохозяйственного плана. Данные контрольные цифры (директивы) должны отражать цели и интересы всего народного хозяйства в целом. На основе использования крупноагрегированной модели народнохозяйственного планирования должно осуществляться согласование частных планов в процессе итеративного детального расчета народнохозяйственного плана.

Необходимость применения синтетической агрегированной модели народнохозяйственного планирования диктуется также и тем,

что глобальный народнохозяйственный оптимум может быть определен только здесь. Так как оптимизация отдельных подразделений народного хозяйства должна подчиняться глобальному критерию, то синтетическая народнохозяйственная модель порождает критерии оптимальности для частных задач.

В связи с тем, что оптимальный народнохозяйственный план предполагается рассчитывать при использовании агрегированной синтетической модели, возникает проблема определения эффективности такого плана, т.е. проблема эффективности использования синтетической модели народнохозяйственного планирования.

Исследованию этой проблемы и посвящена данная работа.

Рассматривается задача построения оптимального перспективного плана народного хозяйства и его показателей. Линейная динамическая модель народнохозяйственного планирования, разработанная Л.В.Канторовичем [6,7], коротко может быть сформулирована следующим образом:

1) имеется информация о всех видах ресурсов, которыми располагает экономика страны, а также информация о перспективах освоения природных ресурсов и о перспективах роста трудовых ресурсов;

2) известны различные технологические производственные процессы, описывающие производство на производственных мощностях, имеющихся в начале планового периода, и технологические процессы, связанные с расширением существующей базы за счет капиталовложений;

3) имеется информация о технологических процессах, описывающих производство на производственных мощностях, вводимых за счет капиталовложений в каждом плановом году;

4) определен состав конечной продукции для личного и общественного потребления для всего планируемого периода.

Требуется определить перспективный план, обеспечивающий наиболее быстрое развитие производительных сил и максимальный выпуск продукции.

Так как оптимальный народнохозяйственный план рассчитывается на основе синтетической агрегированной модели и связано с ней системы отраслевых моделей, то построение такого плана должно представлять процесс последовательного формирования и уточнения. Это уточнение должно состоять из ряда этапов, в ходе которых уточняется как сам перспективный план и его показатели, так и исходная информация и задания. Л.В.Канторович предложил общую схему построения процесса последовательного уточнения данного плана.

Сущность этой схемы состоит в том, что на основе расчета агрегированной народнохозяйственной модели определяется и система объективно обусловленных (о.о.) оценок, которая затем используется для выявления эффективных технологических процессов в отраслях. Эти процессы используются далее для построения отраслевых оптимальных планов. С другой стороны, местные (отраслевые) оценки выявляют наиболее перспективные варианты развития отрасли, которые могут быть представлены в народнохозяйственный план для дальнейшего рассмотрения их уже с точки зрения народнохозяйственной эффективности.

Предлагаются и другие схемы построения оптимального перспективного плана развития народного хозяйства.

Так, М.Г.Завельский [5] используя композиционную схему, опирающуюся на агрегированную синтетическую модель и систему частных отраслевых моделей, предлагает метод построения народнохозяйственного плана на основе последовательной координации отраслевых планов. Признаком же завершения итеративного процесса согласования частных планов является в данном случае достижение после конечного числа итераций такого положения, когда в итоге двух последовательных шагов, полученные в них размеры общественных потребностей (другими словами - компоненты вектора интенсивностей агрегированной модели) оказались бы равными.

Такой же точки зрения на критерий завершения согласования планов придерживается и Л.М.Дудкин [4], предлагающий метод построения оптимального перспективного плана на основе использования схемы динамического межотраслевого баланса и отраслевой структуры народного хозяйства.

Следует отметить, что данный критерий координации планов не является эффективным, так как повторяемость в значении компонент вектора интенсивностей возможна и при достижении допустимого, а не оптимального народнохозяйственного плана. Исследования по координации динамических оптимальных планов отрасли в динамическом оптимальном плане всего народного хозяйства показывают, что повторяемость в значении компонент вектора интенсивностей в агрегированной модели не достигается даже при достижении повторяемости значения линейной формы данной модели.

Кроме того, как указывает В.А.Волконский [1], такие процессы не свободны от опасности "проскочить" оптимум.

Корнаи и Липтак [8] предложили схему построения оптимального народнохозяйственного плана на основе расчета системы взаимосвязанных отраслевых моделей и синтетической модели при использовании игрового подхода. В данном случае приводится из-

вестная интерпретация задачи линейного программирования как нахождения минимаксной стратегии в игре с нулевой суммой. Данный процесс координации планов укладывается в схему итеративного метода Брауна-Робинсона и приводит к достижению оптимального народнохозяйственного плана. Однако данный процесс ослабевает, кроме малой скорости сходимости, еще и немонотонностью процесса улучшения значения целевой функции.

При построении различных схем расчета оптимального народнохозяйственного плана остается неисследованным вопрос об оценке эффективности плана, рассчитываемого на основе синтетической агрегированной модели народнохозяйственного планирования, связанной с системой отраслевых моделей.

Цель исследования состоит в том, чтобы построить процессы координации планов и определить эффективность их использования.

Как уже отмечалось выше, идея последовательного формирования и уточнения оптимального народнохозяйственного плана основывается на том, что данный план рассчитывается на основе синтетической модели, связанной с системой моделей отраслей, предприятий и т.д. В данном случае исследование процессов координации проводится только на уровне "народнохозяйственный план-отрасль", т.е. на том уровне, когда определяются пропорции развития отраслей, распределения капиталовложений, задания по выпуску отраслевой агрегированной продукции. Составление же окончательного народнохозяйственного плана необходимо проводить и на уровне "отрасль-предприятие", где и будет уточняться детальный народнохозяйственный план.

Агрегированная народнохозяйственная модель составляется на основе информации, поступающей из отраслевых моделей. Степень агрегации данной модели определяется как экономическими условиями целесообразности, так и имеющимися вычислительными методами, которые позволяют рассчитывать данную модель как задачу линейного программирования. Расчет народнохозяйственной модели при учете ограничений по народному хозяйству в целом определяет внешние параметры отраслевых моделей: объем производства, размер фонда капиталовложений, величину фонда трудовых ресурсов и т.п. Каждой отраслевой модели первоначально соответствует определенный вариант развития, представленный на рассмотрение в синтетическую модель.

Отраслевые модели представляют собой в данном исследовании также линейные модели производства, описывающие функционирование отдельных разукрупненных видов производств. Так,

если в народнохозяйственной модели имеется общее представление о топливно-энергетической отрасли, то отдельная отраслевая модель дает уже описание функционирования более детально — в ней описывается функционирование угольной, газовой, нефтеперерабатывающей, нефтедобывающей и т.п. отраслей топливно-энергетики. Предполагается, что каждая из разукрупненных отраслей связана уже с моделью, в которой функционируют отдельные предприятия данной отрасли.

Так как в данной схеме координации планов отраслей с народным хозяйством в целом не исследуются процессы, связанные с уточнением планов отдельных предприятий, то в крупных отраслевых моделях продукция других отраслей, выступающая как ресурс, учитывается в агрегированном виде. Это соответствует и существующей практике планирования, когда детализация народнохозяйственного плана происходит путем установления связи между предприятиями различных отраслей в виде хозяйственных договоров по поставкам определенной продукции.

Продукция же отрасли в общих отраслевых моделях учитывается в дезагрегированном виде, соответствующем каждому типу описываемого в модели производства (уголь, нефть, газ и т.п.). Помимо заданий по отдельному виду отраслевой продукции, задается и общее задание по общепромышленной продукции в том виде, в котором она учитывается в агрегированной народнохозяйственной модели. Сведение индивидуальных продуктов в агрегированный производится по заданным коэффициентам агрегации. Если следовать далее примеру с топливно-энергетикой, то это будут коэффициенты перевода каждого отдельного продукта в условное топливо.

Расчет отдельной модели отрасли дает нам определенный план развития отрасли (по полученным из решения народнохозяйственной модели ограничениям). Агрегируя технологические способы, вошедшие в план отрасли, мы получим, соответственно, иное представление отрасли в народнохозяйственной модели. По вновь агрегированным технологическим способам заново рассчитывается агрегированная народнохозяйственная модель. Для краткости будем в дальнейшем называть агрегированную народнохозяйственную модель директивной моделью.

Шаг координации планов состоит в решении директивной модели и в последующем решении отраслевой модели, ограничения которой определяются решением первой.

Перейдем непосредственно к описанию процесса.

Имеется директивная модель, схема которой на i -м шаге реа-

лизации процесса приводится ниже:

$X_1(x)$	$x_1(x)$	$a^1(x)$	$a_n^1(x)$
	$x_2(x)$	$a^2(x)$	$a_n^2(x)$
$X_2(x)$	A		
$X_3(x)$	L		
	b		

Рис.1. Схема директивной модели.

Здесь

$a^1(x) = \{a_i^1(x)\}, i = 1, 2, \dots, n-1$, - вектор технологических коэффициентов затрат по координируемой отрасли на единицу продукции, выпускаемой на фондах, имеющихся к началу планового периода;

$a^2(x) = \{a_i^2(x)\}, i = 1, 2, \dots, n-1$, - вектор технологических коэффициентов по координируемой отрасли на единицу продукции, выпускаемой на фондах, вводимых в планируемый период. Под координируемой отраслью подразумевается отрасль, которая методом декомпозиции представлена отдельной детализированной моделью и план которой необходимо согласовать с планом народнохозяйственной модели;

$a_n^1(x)$ - выпуск продукции координируемой отрасли при единичной интенсивности применения способа, использующего фонды, имеющиеся к началу планового периода;

$a_n^2(x)$ - выпуск продукции координируемой отрасли при единичной интенсивности применения способа, использующего фонды, вводимые в плановый период;

$A = \|a_{ij}\|$ - матрица технологических коэффициентов отраслей, план развития которых не согласуется в данном случае с народнохозяйственным, а определяется непосредственно из решения директивной модели. Для краткости изложения процесса мы рассматриваем случай, когда план развития одной отрасли согласовывается с народнохозяйственным планом. Очевидно, нет никакого принципиального отличия и для случая, когда требуется согласовать планы всех отраслей народного хозяйства, представленных в директивной модели. В данном случае матрица A не меняется при всех x ;

$C = \|c_{ij}\|$ – постоянная при всех y матрица технологических коэффициентов отраслевой модели;

$d(y) = \{d_i(y)\}$, $i = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+m$, – вектор ограничений отраслевой модели;

$Y(y) = \{y_j(y)\}$, $j = 1, \dots, S, S+1, \dots, S_1, \dots, S_2, S_2+1, \dots, S_2^*$, вектор интенсивностей отраслевой модели;

$Y_1(y) = \{y_j(y)\}$, $j = 1, \dots, S$, – вектор интенсивностей способов, использующих фонды, имеющиеся к началу планового периода;

$Y_2(y) = \{y_j(y)\}$, $j = S+1, \dots, S_1$, – вектор интенсивностей способов, использующих фонды, вводимые в плановый период;

$Y_3(y) = \{y_j(y)\}$, $j = S_1+1, \dots, S_2^*$, вектор интенсивностей способов, переводящих i -й продукт отрасли в агрегированный продукт директивной модели;

$\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$ – постоянная при всех y вспомогательная матрица коэффициентов перевода разнородной продукции отрасли вида i ($n+1 \leq i \leq n+n-1$) в агрегированную продукцию директивной модели; $\Pi(y) = \{\pi_i(y)\}$, $i = 1, \dots, n$, – вектор о.о. оценок в директивной модели на y шаге реализации алгоритма.

Кроме того, заданы исходные значения $a'(0)$, $a_n'(0)$, $d(0)$, $Y(0)$ такие, что

1. $\sum_{j=1}^S y_j(0) c_{ij} = d_i(0)$, $i = 1, \dots, m+n-1$ т.е. на начальный период планирования производство и потребление в отраслевой модели сбалансированы.

2. $y_j(0) = 0$, $j = S+1, \dots, S$, т.е. в модели отрасли имеются технологические способы, использующие фонды, которые могут быть введены в планируемый период.

3. $x_i(0) a_i'(0) = \sum_{j=1}^S y_j(0) c_{ij}$, $i = 1, \dots, n-1$. Это условие означает объем ресурсов, потребляемых координируемой отраслью на начало планируемого периода по плану директивной модели, совпадает с объемом ресурсов по плану отдельной отрасли в тот же период.

4. $x_i(0) a_n'(0) = \sum_{j=S_1+1}^{S_2^*} y_j(0) \lambda_{ij}$. Данное условие означает, что объем производства продукции, производимой координируемой отраслью на начало планируемого периода по плану директивной модели, совпадает с объемом производства агрегированной продукции по плану отраслевой модели в тот же период. Так как в отраслевой модели все виды выпускаемой продукции являются промежуточными, а конечным продуктом служит агрегированная продукция, то:

$$\sum_{j=S_1+1}^{S_2} y_j(0) = \sum_{i=n}^{m+n-1} \sum_{j=1}^i y_j(0) c_{ij}.$$

Разнородная продукция отрасли учитывается как агрегированная по коэффициентам λ_{ij} , т.е.

$$\left. \begin{aligned} y_{S_1+1}(0) \lambda_{m+n, S_1+1} &= \left(\sum_{j=1}^{S_1} y_j(0) c_{nj} \right) \lambda_{m+n, S_1+1} \\ y_{S_2}(0) \lambda_{m+n, S_2} &= \left(\sum_{j=1}^{S_2} y_j(0) c_{m+n-1, j} \right) \lambda_{m+n, S_2} \end{aligned} \right\}$$

Поэтому условие по производству продукции на начало планируемого периода в координируемой отрасли может быть записано следующим образом:

$$x_1(0) a_n^1(0) = \sum_{i=1}^t \sum_{i=n}^{m+n-1} y_i(0) c_{ij} \lambda_{ij} = \sum_{j=S_1+1}^{S_2} y_j(0) \lambda_{ij}.$$

Данные $\alpha^1(0)$ и $a_n^2(0)$ определены условиями:

$$x_2(0) \alpha_i^2(0) = \sum_{j=S_1+1}^{S_2} C_{ij}, \quad i = 1, \dots, n-1;$$

$$x_2(0) \alpha_n^2(0) = \sum_{j=S_1+1}^{S_2} \sum_{i=n}^{m+n-1} C_{ij} \lambda_{ij}.$$

На первом шаге координации планов директивной и отраслевой модели значение компонент вектора $\alpha^2(0)$ и скаляра $a_n^2(0)$ определяются, исходя из единичной интенсивности применения способов, использующих в отраслевой модели производственные мощности, вводимые в планируемый период. Дело в том, что до тех пор, пока отрасль не получила под эти способы ресурсы из народнохозяйственной модели и не решена отраслевая модель, невозможно определить пропорции в объеме ввода различных видов производственных мощностей по отрасли. На первом шаге координации планов директивной и отраслевой модели эти соотношения принимаются равными.

Процесс координации планов существенно зависит от начальных весов для новых технологических способов, с помощью которых строится усредненный способ (по вновь вводимым способам координируемой отрасли) для участия в решении директивной модели. Поэтому в практических расчетах следует исходить из некоторых плановых (допустимых) наметок по вводу производственных мощностей в координируемой отрасли. Окончательная структура вводимых производственных мощностей определяется уже при координации планов развития народного хозяйства и отрасли.

После определения $\alpha^1(0)$, $a_n^1(0)$, $\alpha^2(0)$, $\alpha_n^2(0)$ переходим к первому шагу координации планов директивной и отраслевой модели, который начинается с решения директивной модели как задачи линей-

ного программирования.

Описание ν -го шага координации планов директивной и отраслевой моделей

Имеется $X(\nu)$, $a^1(\nu)$, $a^2(\nu)$, $a_n^1(\nu)$, $a_n^2(\nu)$, $d(\nu)$, $\Pi(\nu)$.

1. Решаем отраслевую модель как задачу линейного программирования. Требуется определить вектор $Y(\nu)$, такой, что

$$\begin{aligned} y_j(\nu) &\geq 0, \quad j = 1, \dots, S_2; \\ \sum_{j=1}^{S_1} y_j(\nu) c_{ij} &\geq d_i(\nu), \quad i = 1, \dots, m+n-1; \\ \sum_{j=S_1+1}^{S_2} y_j(\nu) \lambda_{ij} &\geq d_{m+n}(\nu). \end{aligned}$$

2. После того, как определен вектор $Y(\nu)$, вычисляются

$$a_i^1(\nu+1) = \frac{\sum_{j=1}^S y_j(\nu) c_{ij}}{\sum_{j=1}^S y_j(\nu)}, \quad i = 1, \dots, n-1; \quad (1)$$

$$a_i^2(\nu+1) = \frac{\sum_{j=S_1+1}^{S_2} y_j(\nu) c_{ij}}{\sum_{j=S_1+1}^{S_2} y_j(\nu)}, \quad i = 1, \dots, n-1; \quad (2)$$

$$a_n^1(\nu+1) = \frac{\sum_{j=1}^S \sum_{i=1}^{m+n-1} y_j(\nu) c_{ij} \lambda_{ij}}{\sum_{j=1}^S y_j(\nu)}; \quad (3)$$

$$a_n^2(\nu+1) = \frac{\sum_{j=S_1+1}^{S_2} \sum_{i=1}^{m+n-1} y_j(\nu) c_{ij} \lambda_{ij}}{\sum_{j=S_1+1}^{S_2} y_j(\nu)} \quad (4)$$

Как видно из формул (1)-(4), значение компонент агрегируемых технологических способов определялось как средневзвешенная величина соответствующих компонент технологических способов от отраслевой модели. Весами служат интенсивности технологических способов модели, определяемые при ее решении на ν -м шаге реализации алгоритма.

3. Определение вектора $X(\nu+1)$ решается директивная модель как задача линейного программирования. Требуется определить вектор $X(\nu+1)$ такой, что

$$AX_2(r+1) + [a'_1(r+1) + a'_n(r+1)]x_1(r+1) + [a'_2(r+1) + a'_m(r+1)]x_2(r+1) \geq b;$$

$$X(r+1) \geq 0;$$

$$\sum_{i=1}^{s_1} c_{ij} x_j(r) \rightarrow \max.$$

4. Вычисление $d(r+1)$.

$$d_i(r+1) = a'_i(r+1)x_1(r+1) + a'_i(r+1)x_2(r+1), \quad i=1, \dots, n-1.$$

Эти ограничения определяют объем ресурсов в единицах продукции других отраслей директивной модели (включая и объем трудовых ресурсов), выделенных на координирующую отрасль на $(r+1)$ -м шаге координации планов.

$$d_{m,n}(r+1) = a'_n(r+1)x_1(r+1) + a'_m(r+1)x_2(r+1).$$

Следовательно, задание по выпуску продукции данной отрасли на $(r+1)$ -м шаге координации планов определяется как суммарный валовый продукт этой отрасли, производимый по плану директивной модели на $(r+1)$ -м шаге координации планов.

Если при определении плана выпуска отрасли на $(r+1)$ -м шаге координации планов необходимо соблюдать некоторые пропорции в производстве первичных (неагрегированных) продуктов отрасли вида i ($n \leq i \leq m+n-1$), то задаются отдельные ограничения по выпуску этих продуктов. Эти отдельные ограничения в виде агрегированной продукции директивной модели задаются с помощью коэффициентов, которые показывают минимальную долю данного продукта $-Q_i$ ($n \leq i \leq m+n-1$) в общем выпуске отрасли.

Тогда

$$d_i(r+1) = [a'_n(r+1)x_1(r+1) + a'_m(r+1)x_2(r+1)]Q_i, \quad i =$$

$n, n+1, \dots, m+n-1,$

где $\sum_{i=n}^{m+n-1} Q_i = 1.$

Далее процесс повторяется, начиная с решения отраслевой модели.

5. При координации динамических планов народного хозяйства и отрасли на r -м шаге возможен случай, когда директивная модель не выедит ресурсов для ввода новых производственных мощностей по данной отрасли в определенный год планируемого периода. В этом случае необходимо проверить технологические способы, описывающие производство на фондах, которые можно вводить в данный год (но не вошедшие в план отрасли из-за отсутствия фонда капиталовложений) по критерию рентабельности. Воспользуемся для

этого теоремой о характеристике оптимального плана [6]. В силу этой теоремы для всех применяемых в оптимальном плане n , следовательно, рентабельных способов имеет место

$$\sum_j C_{ij} \rho_j(\gamma) = 0 \quad , \text{если } y_j(\gamma) > 0,$$

где $\rho(\gamma) = \{\rho_i(\gamma)\}$, $i = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+m$, — вектор о.о. оценок отраслевой модели на γ -ом шаге координации планов. Проверим по этому критерию технологические способы, описывающие производство продукции отрасли на фондах, которые можно было ввести в план отрасли данного года и которые не вошли из-за отсутствия ресурсов капиталовложений.

Если для такого способа выполняется условие, что хотя $y_j(\gamma) = 0$, $j = s+1, \dots, s$, но $\sum_j C_{ij} \rho_j(\gamma) \geq 0$, то на $(s+1)$ -ом шаге такой технологический способ вводится в директивную модель. Данный технологический способ вводится в директивную модель с индивидуальными затратами ($i = 1, \dots, n-1$), так как по своей группе способов он будет единственным претендентом на участие в определении плана директивной модели на следующем шаге реализации алгоритма. Индивидуальная продукция отрасли, выпускаемая данным способом, приводится к агрегированной с помощью соответствующего ей коэффициента в расчете на единичную интенсивность применения данного способа. Экспериментальная проверка процессов координации планов показала, что достижение полной согласованности динамических оптимальных планов развития народного хозяйства и отрасли возможно только при использовании изложенного выше подхода для проверки соответствующих технологических способов.

II. Разрешимость отраслевой задачи на γ -м шаге реализации метода последовательной координации планов

По плану директивной модели, определенному на γ -м шаге реализации алгоритма имеем:

$$a_i^1(\gamma) x_1(\gamma) + a_i^2(\gamma) x_2(\gamma) + \sum_{j=3}^s a_{ij} x_j(\gamma) + \sum_{j=s+1}^{s_1-1} l_{ij} x_j(\gamma) = b_i, \quad i = 1, \dots, n-1;$$

$$a_n^1(\gamma) x_1(\gamma) + a_n^2(\gamma) x_2(\gamma) + \sum_{j=3}^s a_{nj} x_j(\gamma) + l_{ns} x_{s_1}(\gamma) = b_n.$$

Вектор ограничений для отраслевой задачи определяется на γ -м шаге как

$$\left. \begin{aligned} d_i(\gamma) &= a_i^1(\gamma) x_1(\gamma) + a_i^2(\gamma) x_2(\gamma), \quad i = 1, \dots, n-1; \\ d_{n,n}(\gamma) &= a_n^1(\gamma) x_1(\gamma) + a_n^2(\gamma) x_2(\gamma) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Возникает вопрос — могут ли быть получены на γ -м шаге такие ограничения для отраслевой задачи, что план её будет недопустимым ?

По оптимальному плану отраслевой задачи, полученному на $(\nu-1)$ -м шаге реализации процесса, значения компонент агрегируемых способов определялись следующим образом:

$$\alpha_i^1(\nu) = \frac{\sum_{j=1}^s y_j(\nu-1) c_{ij}}{\sum_{j=1}^s y_j(\nu-1)}, \quad \alpha_i^2(\nu) = \frac{\sum_{j=s+1}^{s_1} y_j(\nu-1) c_{ij}}{\sum_{j=s+1}^{s_1} y_j(\nu-1)}, \quad i=1, \dots, n-1;$$

$$\alpha_n^1(\nu) = \frac{\sum_{j=1}^s \sum_{i=n}^{m+n-1} y_j(\nu-1) c_{ij} \lambda_{ij}}{\sum_{j=1}^s y_j(\nu-1)}, \quad \alpha_n^2(\nu) = \frac{\sum_{j=s+1}^{s_1} \sum_{i=n}^{m+n-1} y_j(\nu-1) c_{ij} \lambda_{ij}}{\sum_{j=s+1}^{s_1} y_j(\nu-1)}.$$

Подставим значения $\alpha_i^1(\nu)$, $\alpha_i^2(\nu)$, $\alpha_n^1(\nu)$, $\alpha_n^2(\nu)$ в равенства (5) и получим, что

$$d_i(\nu) = \frac{\sum_{j=1}^s y_j(\nu-1) c_{ij}}{\sum_{j=1}^s y_j(\nu-1)} x_1(\nu) + \frac{\sum_{j=s+1}^{s_1} y_j(\nu-1) c_{ij}}{\sum_{j=s+1}^{s_1} y_j(\nu-1)} x_2(\nu) \quad \left. \vphantom{d_i(\nu)} \right\} (6)$$

для $i=1, \dots, n-1$;

$$d_{\max}(\nu) = \frac{\sum_{j=1}^s \sum_{i=n}^{m+n-1} y_j(\nu-1) c_{ij} \lambda_{ij}}{\sum_{j=1}^s y_j(\nu-1)} x_1(\nu) + \frac{\sum_{j=s+1}^{s_1} \sum_{i=n}^{m+n-1} y_j(\nu-1) c_{ij} \lambda_{ij}}{\sum_{j=s+1}^{s_1} y_j(\nu-1)} x_2(\nu)$$

Обозначим

$$\bar{y}_j(\nu) = \frac{\sum_{i=1}^s y_i(\nu-1) c_{ij}}{\sum_{i=1}^s y_i(\nu-1)}, \quad (j=1, \dots, s); \quad \hat{y}_j(\nu) = \frac{\sum_{i=s+1}^{s_1} y_i(\nu-1) c_{ij}}{\sum_{i=s+1}^{s_1} y_i(\nu-1)}, \quad (j=s+1, \dots, s_1).$$

Подставив значения $\bar{y}_j(\nu)$ и $\hat{y}_j(\nu)$ в равенство (6), получим, что

$$d_i(x) = \sum_{j=1}^{s_i} c_{ij} \bar{y}_j(x) + \sum_{j=s+1}^{s_i} c_{ij} \hat{y}_j(x), \quad i = 1, \dots, n-1;$$

$$d_{m+n}(x) = \sum_{j=1}^s \sum_{i=n}^{m+n-1} c_{ij} \lambda_{ij} \bar{y}_j(x) + \sum_{j=s+1}^{s_i} \sum_{i=n}^{m+n-1} c_{ij} \lambda_{ij} \hat{y}_j(x)$$

Следовательно, на каждом шаге реализации процесса существуют переменные $\bar{y}_j(x)$ и $\hat{y}_j(x)$, которые реализуют допустимый план в отраслевой задаче.

III. О сходимости процесса последовательной координации оптимальных динамических планов развития народного хозяйства и отрасли

Рассмотрим последовательность значений функционала директивной модели, получаемую при реализации процесса последовательной координации планов:

$$LX(1), LX(2), \dots, LX(\nu), \dots \quad (I2)$$

На каждом $(\nu+1)$ -м шаге по описанию процесса в директивную модель вводятся значения $a^1(\nu+1), a^2(\nu+1), a'_n(\nu+1)$ и $a''_n(\nu+1)$ в дополнение к уже имеющимся на ν -м шаге $a^1(\nu), a^2(\nu), a'_n(\nu), a''_n(\nu)$. Очевидно, что в этом случае последовательность (I2)-монотонно возрастающая

$$LX(1) \leq LX(2) \leq \dots \leq LX(\nu) \leq \dots \quad (I3)$$

Будем вводить на $(\nu+1)$ -м шаге в директивную модель значения $a^1(\nu+1), a^2(\nu+1), a'_n(\nu+1), a''_n(\nu+1)$, тогда и только тогда, когда :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{\nu-1} a_i^1(\nu+1) \pi_i(\nu) + a''_n(\nu) \pi_i(\nu) > 0 \\ \sum_{i=1}^{\nu-1} a_i^2(\nu+1) \pi_i(\nu) + a''_n(\nu) \pi_i(\nu) > 0 \end{aligned} \right\} \quad (I4)$$

Условие (I4) означает, что мы будем вводить в директивную модель агрегированные технологические способы в том случае, когда они увеличат значение линейной формы по сравнению с ее значением на предыдущем шаге.

Если же окажется, что

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} a_i^1(\gamma+1)\pi_i(\gamma) + a_n^1(\gamma+1)\pi_n(\gamma) &\leq 0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2(\gamma+1)\pi_i(\gamma) + a_n^2(\gamma+1)\pi_n(\gamma) &\leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

то очевидно, что введение агрегированных технологических способов не приведет к увеличению значения линейной формы директивной модели на $(\gamma+1)$ -м шаге координации планов.

Здесь $\Pi(\gamma) = \{\pi_i(\gamma)\}$, $i = 1, \dots, n$, -вектор о.о. оценок директивной модели на γ -м шаге координации планов.

Таким образом, при реализации алгоритма последовательной координации планов возможны два случая.

1. Для некоторого $\gamma = \kappa$ имеет место условие (15). Так как в этом случае в директивную модель не будет вводиться способ, агрегированный по решению отраслевой модели, то решение директивной модели на $(\gamma+1)$ -м шаге координации планов совпадает с решением, полученным на γ -м шаге. Следовательно, можем записать, что

если $LX(\kappa) = LX(\kappa+1) = \dots$,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} a_i^1(\kappa+1)\pi_i(\kappa) + a_n^1(\kappa+1)\pi_n(\kappa) &\leq 0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2(\kappa+1)\pi_i(\kappa) + a_n^2(\kappa+1)\pi_n(\kappa) &\leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Таким образом, если $(\kappa+1)$ -м шаге имеет место условие (16), то решение директивной модели будет производиться без способов, агрегированных на данном шаге. Отсюда следует, что решение директивной модели на $(\kappa+1)$ -м шаге будет полностью совпадать с решением на κ -м шаге.

2. На каждом шаге реализации метода последовательной координации планов выполняется условие (14). В этом случае последовательность значений функционала директивной модели можем записать так:

$$LX(1) < LX(2) < \dots < LX(\gamma) < \dots \quad (17)$$

Нас, естественно, интересует вопрос - является ли данная монотонно-возрастающая последовательность ограниченной или нет?

Рассмотрим общий член последовательности (17) - $LX(\gamma)$. Вектор $X(\gamma) = \{x_j(\gamma)\}$, $j = 1, \dots, S_1$, -зависит от γ . Но при $3 \leq j \leq S$ очевидно, что

$$x_j(\gamma) \leq \min_{i=1, \dots, n-1} \frac{b_i}{a_{ij}} \quad (18)$$

где $\beta_i < 0$, $a_{ij} < 0$ заданы и не зависят от δ .

Эти неравенства вытекают из того, что в директивной модели имеются ресурсы, которые не производятся, а заранее задаются, и каждый способ затрачивает данный ресурс. К таким ресурсам относятся прежде всего ресурсы труда, которые потребляются каждым способом. Для способов, описывающих производство на существующих фондах, такими ресурсами будут и ресурсы по имеющимся фондам. Для способов, описывающих производство на вводимых в начальный период фондах, такими ресурсами являются задания по начальным капиталовложениям.

На любом δ -м шаге справедливо, что:

$$x_i(\delta) \leq \min_{1 \leq j \leq n} \frac{b_j - \sum_{i=1}^j a_{ij} x_i(\delta) - \sum_{i=1}^{j-1} l_{ij} x_i(\delta)}{a_{ij}^1(\delta)}, \quad x_i(\delta) \leq \min_{1 \leq j \leq n} \frac{b_j - \sum_{i=1}^j a_{ij} x_i(\delta) - \sum_{i=1}^{j-1} l_{ij} x_i(\delta)}{a_{ij}^2(\delta)} \quad (19)$$

Так как $x_i(\delta)$ для $1 \leq i \leq S$ ограничено (18), а $b_i < 0$, $a_{ij} < 0$ постоянны и не зависят от δ , следовательно, и $b_j - \sum_{i=1}^j a_{ij} x_i(\delta) - \sum_{i=1}^{j-1} l_{ij} x_i(\delta)$ ограничено. Значения $a_{ij}^1(\delta)$ и $a_{ij}^2(\delta)$ определяются как средние значения компонент технологических способов, вошедших в план при решении модели на $(\delta-1)$ -м шаге. Поэтому очевидно, что:

$$\begin{aligned} a_{ij}^1(\delta) &\leq \max_{1 \leq i \leq S} c_{ij} < 0, \quad i = 1, \dots, n-1; \\ a_{ij}^2(\delta) &\leq \max_{S+1 \leq i \leq S} c_{ij} < 0, \quad i = 1, \dots, n-1; \\ a_{in}^1(\delta) &\leq \max_{1 \leq i \leq S} c_{in}, \quad i = n, n+1, \dots, m+n-1; \\ a_{in}^2(\delta) &\leq \max_{S+1 \leq i \leq S} c_{in}, \quad i = n, n+1, \dots, m+n-1. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, согласно (17) - (20), можно утверждать, что существует число R такое, что $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \underline{X}(\delta) = R$, если для каждого δ выполняется условие (14).

IV. Оценка предела

Для определения того, что собой представляет предел последовательности значений функционала директивной модели, которая получается при реализации метода последовательной координации планов, рассмотрим детализированную модель народнохозяйственного планирования. В этой модели отрасль, план которой координируется с планом всего народного хозяйства, представляется так же,

как и в отдельной отраслевой модели. Для краткости будем именовать в дальнейшем детализированную модель народнохозяйственно - го планирования идеальной моделью. Схема такой модели приводится ниже:

	$n-1$	m	1	
X_1	C			
X_2	Λ			
X_3	A'			
X_4	L'			
	b'			<i>max</i>

Рис. 3. Схема идеальной модели.

Здесь

$C = \|c_{ij}\|$ - технологическая матрица отрасли, план которой согласовывался при помощи метода последовательной координации планов с планом народного хозяйства. Матрица C совпадает с технологической матрицей отдельной модели отрасли;

A' - технологическая матрица отраслей, планы развития которых не согласовывались при помощи метода последовательной координации планов, а определялись непосредственно из решения народнохозяйственной модели;

$b' = \{b'_i\}, i = 1, \dots, m+n$, - вектор ограничений идеальной модели: для $1 \leq i \leq m+n-1$ совпадает с b_i директивной модели, а для $i = m+n$ имеет место $b'_n = b_{m+n}$

$L' = \|l'_{ij}\|$ - вспомогательная матрица, введенная для связи производства продукта вида i с линейной формой модели. Значения l'_{ij} совпадают с соответствующими значениями элементов матрицы L директивной модели для $1 \leq i \leq n-1$, а для $i = m+n$ - соответствующим значением l_{ns} , - в директивной;

$X_1 = \{x_j\}, j = 1, \dots, S_1$, - вектор интенсивностей отрасли, представленной в детализованном виде в идеальной модели;

$X_2 = \{x_j\}, j = S_1+1, \dots, S_2$, - вектор интенсивностей способов, переводящих разнородную продукцию детализированной отрасли в агрегированную по коэффициентам λ_{ij} ,

$X_3 = \{x_j\}, j = S_2+1, \dots, S_2$ - вектор интенсивностей отраслей, представлен-

ных (как и в директивной модели) в агрегированном виде;

$X_i = \{x_j\}, j = 1, \dots, S_i,$ - вектор интенсивностей способов, учитывающих в линейной форме производство продукции сверх заданных ограничений по конечному потреблению.

Решим идеальную модель как задачу линейного программирования, т.е. определим вектор $X = \{x_j\}, j = 1, \dots, S_i,$ такой, что

$$AX_i + CX_i \geq B';$$

$$X \geq 0;$$

$$L'X_i \rightarrow \max.$$

В результате решения получим определенное значение функционала идеальной модели - $L'X$. Так как любой усредненный способ в директивной модели может быть получен подбором соответствующих интенсивностей при агрегировании способов детализированной отрасли, то ясно, что любой план, допустимый в директивной модели, может быть реализован и в идеальной модели. Отсюда ясно, что при реализации метода последовательной координации планов $R \in L'X$

Ввиду того, что последовательность $LX(\gamma)$ является ограниченной существует некоторый предельный базис (при $\gamma \rightarrow \infty$), при котором значение линейной формы достигает величины R . Данному предельному базису соответствует некоторый вектор предельных оценок Π^0 такой, что

$$\alpha(\gamma) \Pi^0 \leq 0$$

Таким образом достигается такой уровень координации планов, когда способ, агрегированный по решению отраслевой задачи, будет не более чем рентабельным как по оценкам отраслевого плана, так и по оценкам народнохозяйственного плана. Следовательно, последовательная координация планов при помощи изложенного процесса приводит к оптимальной координации планов в условиях обобщенной (агрегированной) информации по отраслям. И здесь мы можем утверждать только то, что эффективность плана развития народного хозяйства, рассчитанного при помощи данного процесса последовательной координации планов, будет меньше, либо равна эффективности народнохозяйственного плана, рассчитанного при полной информации по отрасли, т.е., что

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} LX(\gamma) \leq L'X$$

VI. Экспериментальная проверка метода последовательной координации планов народнохозяйственной и отраслевой модели

Экспериментальное исследование процессов координации планов проводилось на агрегированной народнохозяйственной модели и модели топливно-энергетической отрасли. В народнохозяйствен-

ной модели данная отрасль представлена совокупностью способов, описывающих производство на каждом из видов производственных мощностей, имеющих в данной отрасли и производящих один агрегированный продукт.

Модель топливно-энергетической отрасли составлена как 8-продуктовая модель, производящая четыре промежуточных продукта (уголь, нефть и нефтепродукты, газ, торф и горючие сланцы) и четыре конечных продукта (электроэнергия, теплоэнергия, топливо, технологическое сырье). В технологических способах отраслевой модели учитываются как затраты продукции других отраслей народного хозяйства, так и затраты собственной (отраслевой) продукции). Наличие в народнохозяйственной модели различных видов производственных мощностей соответствует в отраслевой модели те же виды производственных мощностей.

В целом топливно-энергетическая модель описывается как линейная динамическая модель оптимального планирования. Планируемый период два года.

Для получения контрольных показателей, по которым можно судить об эффективности процессов последовательной координации планов, была составлена и рассчитана детализированная модель народнохозяйственного планирования. Детализированная модель отличалась от агрегированной в данном случае тем, что вместо агрегированных технологических способов по топливно-энергетической отрасли вводилась полностью технологическая матрица, которая соответствует данной отрасли в отдельной отраслевой модели. Экспериментальные расчеты по проверке процессов координации планов проводились применительно к одной отрасли, что было сделано только для сокращения объема вычислительных операций.

В результате расчета детализированной модели были получены показатели, по которым можно было судить об эффективности применения процессов последовательной координации планов. Такими показателями явились - значение линейной формы и о.о. оценка капиталовложений, имеющих к началу планового периода.

В первом варианте расчетов отраслевая задача решалась на максимум фондов на конец расчетного периода (третий год) и на суммарное производство продукции сверх заданного объема за два плановых года. Фонды на каждом шаге координации планов учитывались в линейной форме модели по о.о. оценкам, соответствующим данному виду по народнохозяйственному плану. В этом случае уже на третьем шаге координации планов достигается такое же значение линейной формы агрегированной модели и та же о.о. оценка

капиталовложений, что и по плану детализированной модели. Все последующие шаги координации планов (их было сделано еще три) не изменяют значения линейной формы, но меняется оценка капиталовложений, так как на каждом шаге меняются соотношения в объеме ввода новых мощностей между первым и последующими расчетными годами.

Во втором варианте расчетов отраслевая задача разрешалась на максимум экономии ресурсов по о.о. оценкам народнохозяйственного плана при выполнении заданного ограничения по выпуску продукции. Использование фондов минимизировалось по прокатным оценкам, определяемых для каждого вида фондов из народнохозяйственного плана.

В данном варианте расчетов также на третьем шаге достигалось совпадение в значении линейной формы и о.о. оценки капиталовложений по плану агрегированной и детализированной модели.

Проведенные исследования позволяют утверждать, что схема последовательного уточнения народнохозяйственного оптимального плана, основанная на использовании агрегированной народнохозяйственной модели, является эффективной и вполне реализуемой на современном этапе развития экономико-математических методов и электронно-вычислительной техники.

Л и т е р а т у р а

1. В.А. Волконский. Оптимальное планирование в условиях большой размерности. - Экономика и математические методы, 1965, т.1, вып.2, стр.
2. Д.Гейл. Теория линейных экономических моделей. - М.ИИ, 1963.
3. Дж.Данциг и Ф.Вольф. Алгоритмы разложения для задач линейного программирования. - Математика, 1964, т.8, № 1.
4. Л.М.Дудкин. Оптимальный материальный баланс народного хозяйства. Изд. М., Экономика, 1966.
5. М.Г. Завельский. Оптимизация отраслевого планирования. - Изд. Экономика, М., 1967.
6. Л.В.Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. Изд. АН СССР, М., 1959.
7. Л.В.Канторович, В.Л.Макаров. Оптимальные модели перспективного планирования. - Применение математики в экономических исследованиях, М., Изд. "Мысль", 1965, т.3.
8. И.Корнай, Т.Липтак. Планирование на двух уровнях. - Применение математических методов в экономических исследованиях. Изд. "Мысль", М., 1965, т.3.

Поступила в редакцию
28.У.1968 г.