Оптимальное планирование

1968 г. Выпуск II

УДК 51.330.115

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОДНОПРОДУКТОВОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРИ НАЛИЧИИ МГНОВЕННОЙ ПРЕВРАЩАЕМОСТИ ФОНДОВ

И.Р. ГЛОБЕНКО

I. Введение

Рассмотрим экономическую систему, в которой создается один продукт, часть которого идет на потребление, а часть-на увеличение основных и оборотных фондов. Пусть $T(t)$ -ресурсы труда (заданная функция), которыми мы располагаем в момент t, а $K(t)$ -основные фонды в момент t (искомая функция). Возможные производственные способы будем характеризовать производственной функцией $U(K,T)$, которая дает количество чистого продукта, создаваемого трудом $T(t)$ при использовании основных фондов $K(t)$ в единицу времени. Функция $U(K,T)$ положительно-однородная функция первой степени

$$U(\lambda K,\lambda T)=\lambda U(K,T) \quad ,\lambda>0,$$

относительно которой предполагается

$$U'_x(x,1)>0\ ,\ U''_{xx}(x,1)<0\ ,\ U(0,1)=U(1,0)=0;\ 0<x<+\infty .$$

Относительно функции потребления $V(t)$ предполагается, что она зависит от количества произведенной продукции, часть которой $(1-\gamma)$ потребляется, а оставшаяся часть γ идет на накопление:

$$V(t)=(1-\gamma)U(K,T) .$$

Развитие экономики описывается в этом случае дифференциальным уравнением относительно функции $K(t)$ -объема основных (и оборотных) фондов в зависимости от t :

$$K'(t)=\gamma U(K(t),T(t)) \qquad (1.1)$$

Составление уравнения (I.I) существенно опирается на гипотезу о мгновенной превращаемости фондов из одной формы в другую, именно ту, которая является оптимальной при имеющемся соотношении объемов основных фондов и ресурсов труда в данный момент. Оптимизация системы определяется в каждый момент времени (дифференциальная оптимизация) состоянием объема производства, максимальность которого учтена при введении производственной функции (условие $U''_{xx}(x,1)<0$).

Величина нормы эффективности капиталовложений $n_э=U'_K(K(t),T(t))$ и в условиях данной модели характеризует прирост производства продукции на единицу дополнительных капиталовложений в единицу времени [I].

Описанная модель соответствует I-му типу однопродуктовых моделей, рассмотренных в [2]. Здесь мы имеем в виду изучить асимптотическое поведение модели и некоторых её характеристик.

2. Экспоненциальное распределение ресурсов труда

В этом разделе мы изучим асимптотику решения уравнения (I.I) и нормы эффективности в предположении:

$$T(t)=T(0)e^{\lambda t}, \quad 0\le t<+\infty, \quad \lambda>0.$$

С помощью замены переменной $S(t)=\frac{K(t)}{T(t)}$ уравнение (I.I) приводится к следующему виду:

$$S'(t)+\lambda S(t)=\gamma U(S(t),1) \qquad (2.I)$$

ТЕОРЕМА 2.I. Если уравнение $\gamma U(x,1)-\lambda x$ имеет положительное решение c, то для любого решения уравнения (I.I) имеют место формулы:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{K}{T}=c, \quad \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|K-cT|=\gamma\bar{n}_э \qquad (K(0)\neq cT(0)),$$

где

$$\bar{n}_э=\lim_{t\to\infty}n_э=U'_c(c,1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя (2.I) по t, получаем

$$S''+\lambda S'=\gamma U'_S(S,1)S',$$

откуда

$$S'(t)=S(0)\exp\left(\int_0^t[\gamma U'_S(S,1)-\lambda]d\tau\right). \qquad (2.2)$$

Возможны следующие случаи: $S'(0)>0$, $S'(0)=0$, $S'(0)<0$.

а) $S'(0)>0$, что эквивалентно

$$\frac{K'(0)}{K(0)}-\frac{T'(0)}{T(0)}>0,$$

или

$$\gamma\,\mathcal{U}(S(0),1)>\lambda S(0)\ . \qquad (2.3)$$

На основании (2.2) и (2.3) имеем $S'(t)>0;\ \gamma\mathcal{U}(S(t),1)>\lambda S(t)$ $(0\le t<+\infty)$.Следовательно,функция $S(t)$ возрастающая и ограниченная : $S(t)<c$ $(0\le t<+\infty)$. Тем самым доказано существование конечного предела $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)$.

Покажем,что его значение равно c . Из уравнения (2.I)вытекает существование предела $\lim\limits_{t\to\infty} S'(t)$, который, как не трудно в этом убедиться,равен нулю. В самом деле, предполагая противное,получим $\lim\limits_{t\to\infty} S'(t)=a\ne 0$. Так как $S'(t)>0$, то $a>0$. Далее, можно указать такое значение t_0 ,что имеет место $\frac{a}{2}<S'(t)$ при $t>t_0$. Интегрируя это неравенство, получаем

$$S(t_0)+\frac{a}{2}(t-t_0)<S(t)\ ,\quad t_1\le t<+\infty\ . \qquad (2.4)$$

Переходя к пределу в (2.4), получаем $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)=\infty$.

Тем самым мы приходим к противоречию, так как ранее была доказана ограниченность функции $S(t)$. Следовательно,

$\lim\limits_{t\to\infty} S'(t)=0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)=c$; б) $S'(0)=0$, что эквивалентно $K'(0)T(0)=K(0)T'(0)$, или

$$\gamma\,\mathcal{U}(S(0),1)=\lambda S(0)\ . \qquad (2.5)$$

На основании (2.2) и (2.5) имеем: $S'(t)=0$; $\gamma\mathcal{U}(S(t),1)=\lambda S(t)$ $(0\le t<+\infty)$,откуда $S(t)=c$ $(0\le t<+\infty)$

или $K(t)=K(0)e^{\lambda t}$ $(0\le t<+\infty)$;

в) $S'(t)<0$,что эквивалентно

$$\frac{K'(0)}{K(0)}-\frac{T'(0)}{T(0)}<0\ ,$$

или

$$\gamma\,\mathcal{U}(S(0),1)<\lambda S(0). \qquad (2.6)$$

На основании (2.2) и (2.6) имеем $S'(t)<0$; $\gamma\mathcal{U}(S(t),1)<\lambda S(t)$ $(0\le t<+\infty)$. Следовательно, $S(t)$ убывает, и $S(t)>c$ при $0\le t<+\infty$. Тем самым доказано существование конечного предела $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)$. Аналогично можно показать, что он равен c . Тем самым первая часть теоремы (2.I) доказана.

Переходим к доказательству второй части теоремы. Функция $U'_x(x,1)$ непрерывна при $0<x<+\infty$ по условию. Следовательно,

$$\bar{n}_э=\lim_{t\to\infty} n_э=\lim_{t\to\infty} U'_K(K,T)=\lim_{t\to\infty} U'_S(S(t),1)=U'(c,1).$$

Далее, из уравнения (2.I) следует

$$\frac{S'(t)}{S(t)-c}+\lambda=\frac{\gamma U(S,1)-\lambda c}{S(t)-c} \quad \text{при } S(t)\neq c. \qquad (2.7)$$

Переходя к пределу в (2.7) и пользуясь правилом Лопиталя, получаем

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S'(t)}{S(t)-c}=\gamma\bar{n}_э-\lambda,$$

откуда непосредственно вытекает формула

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|K(t)-cT(t)|=\gamma\bar{n}_э.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.I. В случае Кобба-Дугласа ($U(x,1)=x^{\alpha}$, $0<\alpha<1$) имеет место асимптотическая формула

$$\lim_{t\to\infty} n_э=\alpha\frac{\lambda}{\gamma}.$$

ТЕОРЕМА 2.2. Если $\gamma U(x,1)>\lambda x$ при $0<x<\infty$, то для любого решения уравнения (I.I) имеют место формулы:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln K=\gamma a; \quad \lim_{t\to\infty} n_э=\lim_{t\to\infty}\frac{U(K,T)}{K}=a,$$

где

$$\lim_{x\to\infty} U'_x(x,1)=a>0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $U''_{xx}(x,1)<0$, то $U'_x(x,1)$ - убывающая функция и, следовательно, существует предел $\lim_{x\to\infty}U'_x(x,1)$, который по предположению больше нуля. На основании (2.2) и $\gamma U(x,1)>\lambda x$ $(0<x<\infty)$ имеем $S'(t)>0$ $(0\le t<+\infty)$. Следовательно, $S(t)$ возрастает и $\lim_{t\to\infty}S(t)=\infty$. По правилу Лопиталя имеем

$$\lim_{t\to\infty} n_э=\lim_{t\to\infty}U'_S(S,1)=\lim_{t\to\infty}\frac{U(S,1)}{S}=a. \qquad (2.8)$$

Из (2.I) и (2.8) следует существование предела $\lim_{t\to\infty}\frac{S'}{S}$, который равен

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S'}{S}=\gamma a-\lambda.$$

Пользуясь правилом Лопиталя, имеем

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln S}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{S'}{S}=\gamma a-\lambda,$$

откуда $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln K=\gamma a$.

Теорема доказана.

Аналогично может быть доказана и следующая

ТЕОРЕМА 2.3. Если $\gamma U(x,t)<\lambda x$ при $0<x<+\infty$, то для любого решения уравнения (I.I) имеют место формулы:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln K(t)=\gamma a,\quad \lim_{t\to\infty} n_s=\lim_{t\to\infty}\frac{U(K,T)}{K}=a$$

где

$$a=\lim_{x\to 0} U'_x(x,t).$$

3. Произвольное распределение ресурсов труда

В этом разделе относительно $T(t)$ предполагается: $\lim_{t\to\infty}\frac{T'}{T}=\lambda>0$. Предварительно сформулируем теорему, которая понадобится нам в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 3.I. [3]. Пусть функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрерывны в области $G(x,y)$ и пусть $f(x,y)<g(x,y)$. Если $\varphi(x),\psi(x)$ – решения дифференциальных уравнений $\varphi'=f(x,\varphi)$ и $\psi'(x)=g(x,\psi)$, удовлетворяющие условию $\varphi(\xi)\le\psi(\xi)$, то $\varphi(x)\le\psi(x)$ при $\xi\ge x$

ТЕОРЕМА 3.2. Если $c>0$ и $\gamma U(c,t)=\lambda c$, то для любого решения уравнения (I.I) имеют место формулы:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{K}{T}=c,\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|K-cT|=\gamma\bar{n}_s,$$

где

$$\bar{n}_s=\lim_{t\to\infty} n_s=U'(c,t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения:

$$\nu(t_0)=\inf_{t>t_0}\frac{T'}{T};\quad \mu(t_0)=\sup_{t>t_0}\frac{T'}{T}$$

и выберем t_0 так, чтобы имело место неравенство:

$$|c_\nu-c|<\varepsilon'\qquad \text{при}\quad t\ge t_0, \tag{3.1}$$

где c_ν – корень уравнения $\nu x=\gamma U(x,t)$ и неравенство:

$$|c_\mu-c|<\varepsilon'\qquad \text{при}\quad t\ge t_0, \tag{3.2}$$

где c_μ – корень уравнения $\mu x=\gamma U(x,t)$.

По теореме 2.I для любого $\varepsilon''>0$ найдется t_1 такое, что имеет место

$$|\underline{S}-c_\nu|<\varepsilon'',\quad t\ge t_1, \tag{3.3}$$

где $\underline{S}$ определяется из уравнения $\underline{S}'+\nu(t_0)\underline{S}=\gamma U(\underline{S},t)$, и t_2 такое, что имеет место

$$|\bar{S}-c_\mu|<\varepsilon'' \quad , \quad t>t_2 , \tag{3.4}$$
где $\bar{S}$ определяется из уравнения $\bar{S}'+\mu(t_0)\bar{S}=\gamma U(\bar{S},t)$.
Используя теорему 3.I, а также (3.3) и (3.4), получаем
$$c_\mu-\varepsilon''<\bar{S}<S<\underline{S}<c_\gamma+\varepsilon' \quad , \quad t>max\{t_1,t_2\} . \tag{3.5}$$
На основании (3.I), (3.2) и (3.5) имеем
$$c-\varepsilon<S<c+\varepsilon \ , \ \varepsilon=\varepsilon'+\varepsilon'' \ , \ t>max\{t_0,t_1,t_2\},$$
откуда в силу произвольности выбора ε' и ε'' непосредственно вытекает $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)=c$. Тем самым первая часть теоремы доказана. Доказательство второй части проводится с помощью тех же рассуждений, что и в теореме 2.I. Теорема доказана.

Аналогично можно сформулировать и доказать теоремы типа 2.2 и 2.3.

4. Учет технического прогресса

В случае учета технического прогресса в виде экспоненты развитие экономики описывается дифференциальным уравнением
$$K'=\gamma e^{\rho t}U(K(t),T(t)) \ , \ \rho>0 , \tag{4.I}$$
которое с помощью замены переменной $S(t)=\frac{K(t)}{T(t)}$ можно переписать в следующей эквивалентной форме:
$$S'+\lambda S=\gamma e^{\rho t}U(S,t). \tag{4.2}$$
Относительно функции $T(t)$ предполагается:
$$T(t)=T(0)e^{\lambda t} \ , \lambda>0, \ 0\le t<\infty .$$
Имеет место следующая

ЛЕММА 4.I. Для любого решения уравнения (4.2) имеет место:
$$\lim_{t\to\infty} S(t)=+\infty . \tag{4.3}$$
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S(t)$ – некоторое фиксированное решение уравнения (4.2). Возьмем произвольное фиксированное значение $t_0>0$ и рассмотрим уравнение
$$\bar{S}'+\bar{S}=\gamma e^{\rho t_0}U(\bar{S},t)$$
при условии $\bar{S}(t_0)=S(t_0)$, $t\ge t_0$. По теореме 3.I имеет место:
$$S(t)\ge\bar{S}(t) \quad , t\ge t_0, \tag{4.4}$$
а по теореме 2.I имеет место:
$$\lim_{t\to\infty}\bar{S}(t)=\bar{c}(t_0), \tag{4.5}$$
где $\bar{c}(t_0)$ – корень уравнения
$$\frac{\lambda}{\gamma}e^{-\rho t_0}x=U(x,t) . \tag{4.6}$$
Из уравнения (4.6) вытекает
$$\lim_{t_0\to\infty}\bar{c}(t_0)=\infty . \tag{4.7}$$

Сопоставляя (4.4), (4.5) и (4.7), получаем (4.3).

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.I. Если имеет место

$$\lim_{x\to\infty}\frac{U(x,1)}{x^{\alpha}}=C_0>0 \qquad (0<\alpha<1),$$

то для любого решения уравнения (4.I) имеем:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{K}{e^{\rho t/1-\alpha}T}=\left[\frac{(1-\alpha)C_0\gamma}{\rho+(1-\alpha)\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{4.8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по условию теоремы имеем

$$U(x,1)=x^{\alpha}[C_0+\varepsilon(x)],\ \varepsilon(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}0,$$

то уравнение (4.2) можно записать в эквивалентной форме

$$S'+\lambda S=\gamma e^{\rho t}S^{\alpha}[C_0+\varepsilon(S)].$$

В силу леммы 4.I, для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $t_0>0$, что $|\varepsilon(S)|<\varepsilon$ при $t>t_0$, откуда, используя теорему 3.I, получаем

$$\underline{S}(t)<S(t)<\overline{S}(t), \qquad t>t_0, \tag{4.9}$$

где $\underline{S}$ -решение уравнения:

$$\underline{S}'+\lambda\underline{S}=\gamma e^{\rho t}\underline{S}^{\alpha}[C_0-\varepsilon] \quad \text{при} \quad S(t_0)=\underline{S}(t_0); \tag{4.10}$$

$\overline{S}$ - решение уравнения

$$\overline{S}'+\lambda\overline{S}=\gamma e^{\rho t}\overline{S}^{\alpha}[C_0+\varepsilon] \quad \text{при} \quad S(t_0)=\overline{S}(t_0). \tag{4.11}$$

Решая уравнения (4.10) и (4.11), находим

$$\underline{S}=\left\{\left(\frac{T(t_0)}{T(t)}\right)^{1-\alpha}\underline{S}(t_0)+\frac{(C_0-\varepsilon)\gamma(1-\alpha)}{\rho+\lambda(1-\alpha)}\left[e^{\rho t}-e^{\rho t_0}\left(\frac{T(t_0)}{T(t)}\right)^{1-\alpha}\right]\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}};$$

$$\overline{S}=\left\{\left(\frac{T(t_0)}{T(t)}\right)^{1-\alpha}\overline{S}(t_0)+\frac{(C_0+\varepsilon)\gamma(1-\alpha)}{\rho+\lambda(1-\alpha)}\left[e^{\rho t}-e^{\rho t_0}\left(\frac{T(t_0)}{T(t)}\right)^{1-\alpha}\right]\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

откуда непосредственно вытекает

$$\underline{S}\sim\frac{(C_0-\varepsilon)\gamma(1-\alpha)}{\rho+(1-\alpha)\lambda}\cdot e^{\frac{\rho}{1-\alpha}t}, \tag{4.12}$$

$$\overline{S}\sim\frac{(C_0+\varepsilon)\gamma(1-\alpha)}{\rho+(1-\alpha)\lambda}\ e^{\frac{\rho}{1-\alpha}t}. \tag{4.13}$$

Сопоставляя (4.9), (4.12) и (4.13), получаем (4.8).

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. Если выполнено условие

$$\lim_{x\to\infty}\frac{U(x,1)}{x}=C_1>0,$$

то для любого решения уравнения (4.I) имеем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln K}{e^{\rho t}} = \frac{\gamma}{\rho} c_1 .$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.I.

ТЕОРЕМА 4.3. Если выполнено условие

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln U(x,1)}{\ln x} = \alpha < 1 ,$$

то для любого решения уравнения (4.I) имеем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln K = \frac{\rho}{1-\alpha} + \lambda . \tag{4.14}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по условию теоремы имеем

$$\ln U(x,1) = [\alpha + \varepsilon(x)] \ln x \quad , \text{ где } \varepsilon(x) \to 0 ,$$

то уравнение (4.I) можно записать в эквивалентной форме

$$\dot S + \lambda S = \gamma e^{\rho t} S^{\alpha + \varepsilon(S)} .$$

В силу леммы 4.I, для любого $\varepsilon > 0$,можно указать такое $t_0 > 0$, что $|\varepsilon(S)| < \varepsilon$, $t \geq t_0$, откуда, используя теорему 3.I, получаем

$$\underline{S}(t) < S(t) < \overline{S}(t) \quad , t \geq t_0 , \tag{4.15}$$

где $\underline{S}$ -решение уравнения:

$$\dot{\underline{S}} + \lambda \underline{S} = \gamma e^{\rho t} \underline{S}^{\alpha - \varepsilon} \quad \text{при} \quad S(t_0) = \underline{S}(t_0) , \tag{4.16}$$

$\overline{S}$ -решение уравнения

$$\dot{\overline{S}} + \lambda \overline{S} = \gamma e^{\rho t} \overline{S}^{\alpha + \varepsilon} \quad \text{при} \quad S(t_0) = \overline{S}(t_0) . \tag{4.17}$$

Решая уравнение (4.I6) и (4.I7), находим

$$\underline{S} = \left\{ \left[\frac{T(t_0)}{T(t)}\right]^{1-\alpha+\varepsilon} \underline{S}(t_0) + \frac{\gamma[1-\alpha+\varepsilon]}{\rho + [1-\alpha+\varepsilon]\lambda} \left[e^{\rho t} - e^{\rho t_0} \left(\frac{T(t_0)}{T(t)}\right)^{1-\alpha+\varepsilon} \right] \right\}^{\frac{1}{1-\alpha+\varepsilon}} ,$$

$$\overline{S} = \left\{ \left[\frac{T(t_0)}{T(t)}\right]^{1-\alpha-\varepsilon} \overline{S}(t_0) + \frac{\gamma[1-\alpha-\varepsilon]}{\rho + [1-\alpha-\varepsilon]\lambda} \left[e^{\rho t} - e^{\rho t_0} \left(\frac{T(t_0)}{T(t)}\right)^{1-\alpha-\varepsilon} \right] \right\}^{\frac{1}{1-\alpha-\varepsilon}} ,$$

откуда непосредственно вытекает

$$\ln \underline{S}(t) \sim \frac{\rho}{1-\alpha+\varepsilon} t , \tag{4.18}$$

$$\ln \overline{S}(t) \sim \frac{\rho}{1-\alpha-\varepsilon} t . \tag{4.19}$$

Сопоставляя (4.I5), (4.I8) и (4.I9), получаем (4.I4).

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.4. Если выполнено условие

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln U(x,1) - \ln x}{\ln \ln x} = 0 ,$$

то для любого решения уравнения (4.I) имеем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln \ln K}{t} = \rho . \tag{4.20}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по условию теоремы имеем
$\ln U(x,1) = \ln x + \varepsilon(x) \ln \ln x$, где $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$,
то уравнение (4.I) можно записать в эквивалентной форме:

$$K' = \gamma T_0 e^{(\rho+\lambda)t} S|\ln S|^{\varepsilon(S)},$$

где

$$S = \frac{K}{T}, \quad S(0) = S_0 = \frac{K(0)}{T(0)}.$$

В силу леммы 4.I для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $t_0 > 0$, что $|\varepsilon(S)| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$. (4.2I)

С другой стороны, имеем $\lim\limits_{t\to\infty} U_1(S,1) = C < \infty$. Следовательно, найдутся константы A и t_1 такие, что

$$U(S,1) \leq AS \quad \text{при} \quad t \geq t_1. \qquad (4.22)$$

Рассмотрим уравнение

$$\underline{K}' = \gamma e^{\rho t} \underline{K} \left|\ln \frac{\underline{K}}{T}\right|^{-\varepsilon}.$$

В силу (4.2I) и теоремы 3.I решение $K(t)$ мажорирует решение $\underline{K}(t)$ при условии $K(t_0) = \underline{K}(t_0)$, $t \geq t_0$. Для решения $\underline{K}(t)$ можно указать такое t_2, что $|\ln\underline{K} - \lambda t| < \ln\underline{K}$ при $t \geq t_2$, так как снова в силу теоремы 3.I $e^{-\lambda t}\underline{K} \to \infty$ при $t \to \infty$, откуда решение $\underline{K}$ мажорирует решение уравнения

$$\underline{K}' = \gamma e^{\rho t} \underline{\underline{K}} |\ln \underline{\underline{K}}|^{-\varepsilon}, \quad t \geq t_2, \qquad (4.23)$$

при условии $\underline{K}(t_2) = \underline{\underline{K}}(t_2)$.

В силу (4.22) решение уравнения

$$\overline{K}' = A\gamma e^{\rho t} \overline{K} \qquad (4.24)$$

мажорирует решение $K(t)$ при условии $\overline{K}(t_1) = K(t_1)$, $t \geq t_1$.

На основании (4.23) и (4.24) имеем

$$\underline{\underline{K}}(t) < K(t) \leq \overline{K}(t) \qquad (4.25)$$

при $t \geq t' = max(t_0, t_1, t_2)$.

Решая уравнения (4.23) и (4.24), получаем

$$\ln\overline{K}(t) = \ln\overline{K}(t') + \frac{\gamma A}{\rho}\left[e^{\rho t} - e^{\rho t'}\right],$$

$$\left[\ln\underline{\underline{K}}(t)\right]^{1+\varepsilon} = \left[\ln\underline{\underline{K}}(t')\right]^{1+\varepsilon} + \frac{\gamma A(1+\varepsilon)}{\rho}\left[e^{\rho t} - e^{\rho t'}\right],$$

откуда следует

$$\ln\overline{K} = o(e^{\rho t}), \qquad (4.26)$$

$$\left[\ln\underline{\underline{K}}\right]^{1+\varepsilon} = o(e^{\rho t}). \qquad (4.27)$$

Сопоставляя (4.25), (4.26) и (4.27) и переходя к пределу, получаем

$$\frac{\rho}{1+\varepsilon} \leq \varliminf_{t\to\infty} \frac{\ln\ln K}{t} \leq \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln\ln K}{t} \leq \rho,$$

откуда в силу произвольности выбора ε следует (4.20). Теорема доказана.

В заключение докажем две теоремы относительно асимптотического поведения нормы эффективности в случае учета технического прогресса.

ТЕОРЕМА 4.5. Если выполнено условие теоремы 4.3 и, кроме того, существуют пределы

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xU'_x(x,1)}{U(x,1)}, \quad \lim_{t\to\infty} n_э,$$

то имеет место формула:

$$\lim_{t\to\infty} n_э = \alpha\frac{\rho+(1-\alpha)\lambda}{(1-\alpha)\gamma}. \tag{4.28}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу правила Лопиталя

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xU'_x(x,1)}{U(x,1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln U(x,1)}{\ln x} = \alpha.$$

По определению $n_э$ имеем

$$n_э = e^{\rho t}U'_s(S,1) = \frac{U(S,1)}{S}\cdot e^{\rho t}\frac{SU'(S,1)}{U(S,1)},$$

откуда следует существование предела

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(S,1)}{S}e^{\rho t} = \frac{1}{\alpha}\lim_{t\to\infty} n_э. \tag{4.29}$$

Вычислим его:

$$\begin{gathered}\lim_{t\to\infty} \frac{U(S,1)}{S}e^{\rho t} = \frac{1}{\gamma}\lim_{t\to\infty}\left[\lambda + \frac{S'}{S}\right] = \\ = \frac{\lambda}{\gamma} + \lim_{t\to\infty}(\ln S)' = \frac{\lambda}{\gamma} + \lim_{t\to\infty}\frac{\ln S}{t} = \frac{\lambda(1-\alpha)+\rho}{\gamma(1-\alpha)}.\end{gathered} \tag{4.30}$$

Сопоставляя (4.29) и (4.30), получаем (4.28).

ТЕОРЕМА 4.6. Если выполнено условие теоремы 4.4 и, кроме того, существует предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xU'_x(x,1)}{U(x,1)},$$

то имеет место формула:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln n_э}{t} = \rho.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы 4.4 следует

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln U(x,1)}{\ln x} = 1,$$

откуда в силу правила Лопиталя получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{U'_x x}{U} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln U(x,1)}{\ln x} = 1.$$

По определению $n_э$ имеем

$$n_э = e^{\rho t}U'_s(S,1) = e^{\rho t}\frac{U(S,1)}{S}\,\frac{SU'_s(S,1)}{U(S,1)}. \tag{4.31}$$

Прологарифмировав (4.31) и разделив на t, получим

$$\frac{\ln n_*}{t}=\rho+\frac{1}{t}\ln\frac{U(S,1)}{S}+\frac{1}{t}\ln\frac{SU'}{U}.$$

По условию теоремы имеем

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{SU'}{U}=0,$$

а в силу теоремы 4.4 получим

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{U(S,1)}{S}=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\ln S}{t}\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{\ln U(S,1)-\ln S}{\ln\ln S}=0.$$

Теорема доказана.

5. Учет запаздывания аргумента

Уравнение с учетом запаздывания роста капиталовложений записывается в виде:

$$K'(t+\tau)=\gamma U(K,T). \tag{5.1}$$

Сделаем следующие предположения:

а) $T(t)=T(0)e^{\lambda t}$, $0\le t<+\infty$;

б) $\varphi(t)$ (начальная функция) определена на $[0,\tau]$ и, кроме того, $\psi'(t)\geq 0$, где $\psi(t)=\varphi(t)T^{-1}(0)e^{-\lambda t}$;

в) $K(t)$ определена на $[0,\infty)$; $K(t)=\varphi(t)$ при $t\in[0,\tau]$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 5.1. В предположениях а), б), в) для решения уравнения (5.1) имеет место формула:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{K(t)}{T(t)}=c(\tau),$$

где $\lambda e^{\lambda\tau}c(\tau)=\gamma U(c(\tau),1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В результате замены переменной $S=\frac{K}{T}$ получим

$$S'(t+\tau)+\lambda S(t+\tau)=\gamma e^{-\lambda\tau}U(S(t),1). \tag{5.2}$$

Продифференцируем (5.2) по t:

$$S''(t+\tau)+\lambda S'(t+\tau)=\gamma e^{-\lambda\tau}U'[S(t),1]S'(t),$$

откуда

$$S'(t+\tau)=e^{-\lambda(t+\tau)}[S'(\xi+\tau)+$$

$$+\gamma e^{-\lambda\tau}\int_{\xi}^{t}U'[S(\theta,1)S'(\theta)e^{\lambda(\theta+\tau)}d\theta],$$

где $\xi\in[0,\infty]$.

Разобьем $[0,\infty]$ на части $[(i-1)\tau, i\tau]$, $i=1,2,3,\ldots$. Для $S'(t+\tau)$ при $0<t\le\tau$ имеем:

$$S'(t+\tau)=e^{-\lambda(t+\tau)}[\gamma'(0)+\gamma e^{-\lambda\tau}\int_0^t U[\gamma(\theta),1]\gamma(\theta)e^{\lambda(\theta+\tau)}d\theta];$$

Далее,так как $\gamma(t)>0$ при $0\le t<\tau$,то $S'(t)>0$ при $\tau<t\le 2\tau$. Продолжая этот процесс,можно показать, что $S'(t)>0$ при $i\tau<t\le(i+1)\tau$ и так далее. Таким образом, $S'(t)>0$ при $0<t\le+\infty$. Условие $S'(t)>0$ эквивалентно условию $\lambda e^{\lambda\tau}S(t)<\gamma U[S(t),1]$. Предполагая,что уравнение $\lambda e^{\lambda\tau}x=\gamma U(x,1)$ имеет единственный корень $c(\tau)$, получаем ограниченность функции $S(t)$. Тем самым доказано существование предела $\lim_{t\to\infty}S(t)$, который, как легко показать, равен $c(\tau)$.

Теорема доказана.

Проследим,как влияет эффект запаздывания на поведение нормы эффективности при $t\to\infty$.

По формуле Тейлора имеем:

$$U'(c(\tau),1)=U'(c,1)+U''(c,1)[c(\tau)-c]+o(c(\tau)-c),\ c=c(0). \qquad (5.3)$$

Из уравнения $\lambda c(\tau)exp(\lambda\tau)=\gamma U(c(\tau),1)$, применяя формулу Тейлора, получаем:

$$\lambda c(\tau)[1+\lambda\tau+o(\tau)]=\gamma U(c,1)+\gamma U'(c,1)[c(\tau)-c]+o(c(\tau)-c),$$

откуда $[c(\tau)-c][\lambda-\gamma U'(c,1)+o(1)]=-\lambda^2\tau c(\tau)-\lambda c(\tau)o(\tau)$.

Следовательно, $$c(\tau)-c=o(\tau), \qquad (5.4)$$

$$c(\tau)=c[1-\frac{\lambda^2}{\lambda-\gamma U'(c,1)}\tau]+o(\tau). \qquad (5.5)$$

Сопоставляя (5.3), (5,4) и (5.5), получаем

$$\lim_{t\to\infty}n_э(\tau)=\lim_{t\to\infty}n_э(0)-\frac{\lambda^2U''(c,1)}{\lambda-\gamma U'(c,1)}\tau+o(\tau),$$

где $$\lim_{t\to\infty}n_э(0)=U'(c,1).$$

6. Вариационная задача

Рассмотрим вариационную задачу относительно функционала

$$F(V(t))=\int_0^{\bar t}V(t)dt=\int_0^{\bar t}[U(K,T)-K']dt$$

в классе кусочно-гладких функций при условии:

$$K(0)=K_0,\ K(\bar t)=K_1,\ 0\le K'\le U(K,T),\ 0\le t\le\bar t\le\infty.$$

Экономический смысл этой задачи таков. Установить режим работы нашей модели, при котором потребление $V(t)$ достигает максимума за время $0\le t\le\bar t$. Покажем, что экстремум существует, и вычислим его. Прежде всего заметим, что существует единственное решение $\bar K$ уравнения $K'=U(K,T)$ при

$K(0)=K_0$. Пусть t' таково, что $\bar K(t')=K_1$.
Преобразуя $F(V(t))$, получаем

$$\max F(V(t))=\max\{\int_0^{\bar t} U(K,T)dt-K_1+K_0\}.$$

Покажем, что экстремальная кривая $K_{max}(t)$ имеет вид:

$$K_{max}=\begin{cases}\bar K(t), & 0<t\le t',\\ K_1, & t'\le t\le \bar t<\infty.\end{cases}$$

Во-первых, очевидно, что $K_{max}(t)\le K_1$ при $t'\le t\le\bar t$. С другой стороны, из вида $F(V(t))$ ясно, что $K_{max}(t)$ не может быть меньше $\bar K(t)$ при $0\le t\le t'$. Покажем, что $K_{max}(t)$ не может быть и больше $\bar K(t)$ при $0<t<t'$. Допуская противное, можно указать точку t'', в которой $\bar K(t'')=K_{max}(t'')$, $\bar K'(t'')<K'_{max}(t)$, откуда

$U[K_{max}(t''),T(t'')]<K'_{max}(t'')$. Следовательно, $V_{max}(t'')<0$, и мы получаем противоречие.

7. Пример

В заключение приведем пример, который показывает, что пределы

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln U(x,1)}{\ln x},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{xU'_x(x,1)}{U(x,1)},$$

вообще говоря, не существуют даже при достаточно сильных предположениях относительно функции $U(x,1)$. Этот пример автору сообщил Н.И. Глебов.

Рассмотрим две функции $U_1(x,1)=x^{\frac{1}{2}}$ и $U_2(x,1)=x^{\frac{1}{3}}$. Из некоторой фиксированной точки $\{x_0,x_0^{\frac{1}{3}}\}$ проводим касательную к U_2 до пересечения с U_1 в некоторой точке $\{x_1,x_1^{\frac{1}{2}}\}$. Из точки $\{x_1,x_1^{\frac{1}{2}}\}$ проводим касательную к U_2 до пересечения с U_1 в некоторой точке $\{x_2,x_2^{\frac{1}{2}}\}$ и так далее, продолжая этот процесс до бесконечности. Совокупность отрезков прямых, заключенных между U_1 и U_2, определяет ломаную линию, которая легко модифицируется в бесконечно дифференцируемую, строго вогнутую и возрастающую функцию. Несуществование предела

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln U(x,1)}{\ln x}$$

очевидно. Несуществование предела

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xU'_x(x,1)}{U(x,1)}$$

вытекает из правила Лопиталя.

Литература

I. Л.В. Канторович, В.Л. Макаров. Применение математики в экономических исследованиях. Изд-во соц. эконом. лит., т.3, (I965), стр. 70-72, М.

2. Л.В. Канторович, Л.И. Горьков. - ДАН СССР, I29, 4(I959).

3. Э.Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. "Наука", М. (I965).

Поступила в редакцию
I5 июня I968 .