Оптимальное планирование, вып.10 (1968), 47-59.

УДК 512.25/.26+519.3:330.115

В.И. ШМЫРЁВ

МЕТОД ПАРАМЕТРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В работе предлагается метод решения общей задачи линейного программирования, позволяющий, как и primal - dual алгорифм [3], исключить двухэтапность процесса решения, свойственную методу последовательного улучшения [I] (симплекс-метод [2]). Рассматриваемый метод даёт возможность полностью исследовать пару двойственных задач линейного программирования, включая случай, когда ни в одной из задач нет допустимых векторов. Особенно эффективен он в тех случаях, когда удаётся a priori указать (из физических или иных соображений) оценку снизу (сверху) для оптимального значения минимизируемой (максимизируемой) функции исследуемой задачи. Подход, положенный в основу метода, является развитием применительно к задачам линейного программирования идей работы [4].

§ I. Некоторые сведения из общей теории линейного программирования

Рассмотрим следующую пару двойственных задач линейного программирования. Заданы векторы:

$$c=(c_1,c_2,\dots,c_n),\ b=(b_1,b_2,\dots,b_m),\ a^j=(a_{1j},a_{2j},\dots,a_{mj}),\ j=1,\dots,n.$$

<u>Задача I</u>. Определить вектор $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$,

минимизирующий форму

$$\mu(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{I}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\ , \quad i=1,2,\ldots,m\ , \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0\ , \quad j=1,2,\ldots,n\ . \tag{3}$$

Задача П. Определить вектор $y=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$, максимизирующий форму

$$\nu(y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{4}$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leqslant c_j\ , \quad j=1,2,\ldots,n\ . \tag{5}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $b_i \geqslant 0$ $(i=1,2,\ldots,m)$.

Для удобства дальнейшего изложения введем в рассмотрение множества:

$$X=\left\{x \,\middle|\, x=(x_1,x_2,\ldots,x_n), \sum_{j=1}^{n} x_j a^j = b,\ x_j \geqslant 0,\ j=1,\ldots,n\right\}, \tag{6}$$

$$Y=\left\{y \,\middle|\, y=(y_1,y_2,\ldots,y_m), (y,a^j) \leqslant c_j\ ,\ j=1,2,\ldots,n\right\}\ , \tag{7}$$

где под (y, a^j) понимается скалярное произведение векторов y и a^j.

Элементы множеств X и Y будем называть допустимыми векторами задач I и П, соответственно, а искомые векторы этих задач - оптимальными.

Из общей теории линейного программирования известно, что для приведенной пары задач справедливы следующие положения:

I.I. Для любых $x \in X$, $y \in Y$ имеет место неравенство

$$\mu(x) \geqslant \nu(y)\ ,$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда x и y являются оптимальными векторами задач I и II.

I.2. Если $X \neq \emptyset$ $(Y \neq \emptyset)$ и $\inf\limits_{x \in X}(c,x) > -\infty$ $(\sup\limits_{y \in Y}(b,y) < +\infty)$, то существует оптимальный вектор задачи I (задачи II).

I.3. Если разрешима одна из пары двойственных задач, то разрешима и другая. В случае неразрешимости этих задач из $X \neq \emptyset$ $(Y \neq \emptyset)$ следует $\inf\limits_{x \in X}(c,x) = -\infty$ ($\sup\limits_{y \in Y}(b,y) = +\infty$). Таким образом, при исследований рассматриваемых задач возможен один из следующих случаев:

I) $X \neq \emptyset$, $Y = \emptyset$ – в обеих задачах существуют оптимальные векторы, причём значения функций μ и ν на этих векторах равны.

2) $X \neq \emptyset$, $Y = \emptyset$ – функция μ не ограничена снизу на множестве X, а в задаче II нет допустимых векторов.

2') $X = \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ – функция ν не ограничена сверху на множестве Y, а в задаче I нет допустимых векторов.

3) $X = \emptyset$, $Y = \emptyset$ – ни в одной из задач нет допустимых векторов.

§ 2. Описание метода

С рассмотренными выше задачами I и II свяжем пару экстремальных задач, зависящих от параметра λ.

Задача III. Определить вектор $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots x_n, z_0, z_1, \dots, z_m)$, минимизирующий форму

$$\nu(\bar{x}) = \sum_{i=0}^{m} z_i \tag{8}$$

при условиях:

$$x_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - z_0 = \lambda \quad ; \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + z_i = b_i, \quad i = 1,2,\dots,m; \tag{10}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 0,1,\dots,n; \tag{11}$$

$$z_i \geqslant 0, \quad i = 0,1,\dots,m. \tag{12}$$

Задача IV. Определить вектор $\bar{y} = (y_0, y_1, \dots, y_m)$, максимизирующий форму

$$w(\bar{y})=\lambda y_0+\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (13)$$

при условиях:

$$c_i y_0 + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq 0, \quad j=1,2,\ldots,n; \qquad (14)$$

$$-1 \leq y_0 \leq 0; \qquad (15)$$

$$y_i \leq 1, \quad i=1,2,\ldots,m. \qquad (16)$$

При фиксированном λ векторы $\bar{x}$, удовлетворяющие условиям (9) - (12), образуют множество $\bar{X}(\lambda)$ допустимых векторов задачи Ш.

Введем в рассмотрение функцию

$$L(\lambda)=\min_{\bar{x}\in\bar{X}(\lambda)} V(\bar{x}). \qquad (17)$$

Отметим некоторые свойства этой функции.

2.1. Функция L определена на всей вещественной оси и принимает лишь неотрицательные значения.

Действительно, при любом $\lambda\in(-\infty,+\infty)$ вектор $\bar{x}$ с компонентами

$$x_0=\begin{cases} 0, & \lambda<0 \\ \lambda, & \lambda\geq 0 \end{cases}, \quad x_j=0, \quad j=1,2,\ldots,n; \qquad (18)$$

$$z_0=\begin{cases} -\lambda, & \lambda<0 \\ 0, & \lambda\geq 0 \end{cases}, \quad z_i=b_i, \quad i=1,2,\ldots,m \qquad (19)$$

удовлетворяет условиям (9) - (12), и, следовательно, $\bar{X}(\lambda)\neq\varnothing$. Кроме того, $V(\bar{x})\geq 0$ для любого $\bar{x}\in\bar{X}(\lambda)$. Таким образом, ввиду 1.2., задача Ш разрешима при любом λ. Неотрицательность функции L очевидна.

2.2. Функция L выпуклая.

Действительно, пусть $\bar{x}^1$ и $\bar{x}^2$ - оптимальные векторы задачи Ш соответственно при $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$. Тогда при $t\in[0,1]$ имеем $(t\bar{x}^1+(1-t)\bar{x}^2)\in\bar{X}(t\lambda_1+(1-t)\lambda_2)$ и, следовательно,

$$L(t\lambda_1+(1-t)\lambda_2)\leq V(t\bar{x}^1+(1-t)\bar{x}^2)=tV(\bar{x}^1)+(1-t)V(\bar{x}^2)=tL(\lambda_1)+(1-t)L(\lambda_2).$$

2.3. Из теории параметрических задач линейного программирования следует существование такой конечной (возможно, не единственной) системы точек $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, что каждому из промежутков

$$(-\infty, \alpha_1], [\alpha_1, \alpha_2], \dots, [\alpha_N, +\infty) \qquad (20)$$

соответствует некоторое решение задачи III, линейно зависящее от λ, и решение задачи IV, не зависящее от λ. Так что на каждом из промежутков (20) функция L линейна и имеет вид:

$$L(\lambda) = \lambda y_0 + \sum_{i=1}^{m} b_i y_i, \qquad (21)$$

где $\bar{y} = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ - решение задачи IV для соответствующего промежутка.

Покажем, что на последнем промежутке $[\alpha_N, +\infty)$ верно

$$L(\lambda) = const.$$

Ввиду 2.1 и 2.2 достаточно показать, что L - убывающая функция. Пусть $\lambda_2 > \lambda_1$ и $\bar{x}^1 = (x_0^1, x_1^1, \dots, x_n^1, z_0^1, z_1^1, \dots, z_m^1)$ - оптимальный вектор задачи III при $\lambda = \lambda_1$. Образуем вектор $\bar{x}^2 = (x_0^1 + \lambda_2 - \lambda_1, x_1^1, \dots, x_n^1, z_0^1, \dots, z_m^1)$. Ясно, что $\bar{x}^2 \in \bar{X}(\lambda_2)$ и, следовательно,

$$L(\lambda_2) \leq V(\bar{x}^2) = V(\bar{x}^1) = L(\lambda_1).$$

2.4. Пусть $\bar{y}$ - решение задачи IV для некоторого промежутка $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, а $\bar{y}^1 = (y_0^1, y_1^1, \dots, y_m^1)$ - произвольное решение задачи IV при $\lambda = \alpha_k$. Тогда

$$\alpha_k y_0 + \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \alpha_k y_0^1 + \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^1. \qquad (22)$$

Так как в условиях (14)-(16) параметр λ не фигурирует, то при $\lambda \in (\alpha_k, \alpha_{k+1})$ имеет место неравенство

$$W(\bar{y}^1) \leq W(\bar{y}),$$

т.е.

$$\lambda y_0^1 + \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^1 \leq \lambda y_0 + \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \qquad (23)$$

Из (22) и (23) следует $y_0' \leqslant y_0$, и так как, ввиду (21),

$$L'(\lambda)=y_0, \quad \lambda\in(\alpha_k, \alpha_{k+1}), \tag{24}$$

то

$$y_0' \leqslant L'_+(\alpha_k). \tag{25}$$

Аналогично можно показать, что

$$y_0' \geqslant L'_-(\alpha_k). \tag{26}$$

Таким образом, сопоставляя (24), (25) и (26), видим, что для любого $\bar{\lambda}$ верно

$$L'_-(\bar{\lambda})\leqslant y_0(\bar{\lambda}) \leqslant L'_+(\bar{\lambda}), \tag{27}$$

где $\bar{y}(\bar{\lambda})=(y_0(\bar{\lambda}), y_1(\bar{\lambda}), \ldots, y_m(\bar{\lambda}))$ - какое-либо решение задачи IУ при $\lambda=\bar{\lambda}$.

Связь задач I и П с задачами Ш и IУ устанавливает следующая

<u>Теорема</u>.

I. В задаче I нет допустимых векторов тогда и только тогда, когда $L(\lambda)>0$ для всех $\lambda\in(-\infty,+\infty)$.

2. В задаче П нет допустимых векторов тогда и только тогда, когда $L(\lambda)\equiv const$.

<u>Доказательство</u>.

I. Если $L(\lambda)>0$ для всех $\lambda\in(-\infty,+\infty)$, то $X=\varnothing$, ибо если существует $x\in X$, то $L(\mu(x))=0$.

Предположим теперь, что при $X=\varnothing$ найдется такое $\lambda_0\in(-\infty,+\infty)$, что $L(\lambda_0)=0$. Пусть $\bar{x}$ - решение задачи Ш при $\lambda=\lambda_0$. Тогда $z_i=0$ $(i=0,1,\ldots,m)$ и вектор $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ является допустимым вектором задачи I.

Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

2. Пусть при $L(\lambda)\equiv d$ найдется $y\in Y$. Тогда, если $\bar{x}$ - решение задачи Ш при некотором λ, то

$$z_i\leqslant L(\lambda)=d, \quad i=0,1,\ldots,m. \tag{28}$$

Умножая соотношения (9), (10) соответственно на $-1, y_1,\ldots,y_m$ и складывая, получим

$$-\lambda+(b,y)=-x_0+\sum_{j=1}^{n} x_j\,(y,a^j)-c_j)+z_0+\sum_{i=1}^{m} z_i y_i \le z_0+\sum_{i=1}^{m} z_i y_i . \quad (29)$$

Но правая часть неравенства (29), ввиду (28), ограничена величиной $d(1+\sum_{i=1}^{m} |y_i|)$, левая же при достаточно малых λ может быть сделана сколь угодно большой. Полученное противоречие доказывает, что из $L(\lambda)\equiv const$ следует $Y=\emptyset$.

Пусть $Y=\emptyset$ и $\bar{y}$ - решение задачи IУ для промежутка $(-\infty, \alpha_1]$. Если бы $y_0\neq 0$, то вектор $u=-\frac{1}{y_0}(y_1,\dots,y_m)$ являлся бы допустимым вектором задачи П, что противоречит условию. Следовательно, $y_0=0$. А тогда из (2I) следует, что $L(\lambda)\equiv const$ для $\lambda\in(-\infty,\alpha_1]$ и, ввиду 2.2 и 2.3, получаем $L(\lambda)\equiv const$, что завершает доказательство теоремы.

<u>Следствие</u>. Задачи I и П тогда и только тогда имеют оптимальные векторы, когда множество D нулей функции L не пусто и не совпадает со всей вещественной осью. При этом

$$\min_{x\in X}\mu(x)=\min_{\lambda\in D}\lambda .$$

Таким образом, исследование задач I и П сводится к изучению поведения функции L. Это может быть осуществлено посредством излагаемого ниже метода.

В дальнейшем каждому вектору $\bar{y}=(y_0,y_1,\dots,y_m)$ при $y_0\neq 0$ будем сопоставлять m - мерный вектор

$$u(\bar{y})=-\frac{1}{y_0}(y_1,y_2,\dots,y_m).$$

I. Исходя из допустимого при неположительных значениях λ вектора $\bar{x}$ с компонентами

$$x_j=0\ (j=0,1,\dots,n),\ z_0=-\lambda,\ z_i=b_i\ \ (i=1,2,\dots,m),$$

методом последовательного улучшения находим оптимальные векторы задач Ш и IУ для некоторого интервала $(-\infty,\alpha_1]$, т.е. для всех достаточно малых значений λ. Это достигается посредством того, что λ не фиксируется, но считается достаточно малым. Схема вычислений по методу последовательного улучшения для этого случая отличается от обычно применяемой лишь тем, что переменные x_j и z_i будут линейными функциями от λ (см. [2], гл. 8). Пусть $\bar{y}^0=(y_0^0,y_1^0,\dots,y_m^0)$ -полученное таким образом решение задачи IУ.

Если $y_0^0 = 0$, то, ввиду 2.2 и 2.3, $L(\lambda) \equiv const$. Но тогда, в силу доказанной теоремы, $Y = \varnothing$ и для рассматриваемых задач реализуется случай 2) или 3) пункта I.3 соответственно при $L = 0$ и $L > 0$.

Если $y_0^0 < 0$, то $u(\bar{y}^0) \in Y$, а $\lambda = \nu(u(\bar{y}^0))$, ввиду I.I, удовлетворяет соотношению[ж)]:

$$\lambda \leq \inf_{x \in X} \mu(x). \tag{30}$$

Полагая $\lambda_1 = \nu(u(\bar{y}^0))$, переходим к пункту II.

II. Имея некоторое $\lambda = \lambda_k$, удовлетворяющее соотношению (30), находим оптимальные векторы задач III и IУ при $\lambda = \lambda_k$. Пусть таковыми являются

$$\bar{x}^k = (x_0^k, x_1^k, \dots, x_n^k, z_0^k, z_1^k, \dots, z_m^k),$$

$$\bar{y}^k = (y_0^k, y_1^k, \dots, y_m^k).$$

Если $L(\lambda_k) = 0$, векторы $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $u(\bar{y}^{k-1})$ представляют собой решения задач I и II. Реализуется случай I) пункта I.3.

Если $L(\lambda_k) > 0$, возможны следующие случаи:

а) $\bar{y}_0^k = 0$ - тогда, ввиду 2.2 и 2.4, $L(\lambda) > 0$ для всех λ и, в силу доказанной теоремы, для рассматриваемых задач реализуется случай 2) пункта I.3.

б) $y_0^k < 0$ - в этом случае $u(\bar{y}^k) \in Y$ и $\lambda = \nu(u(\bar{y}^k))$, ввиду I.I, удовлетворяет соотношению (30). Кроме того, имеем:

$$\nu(u(\bar{y}^k)) = -\frac{1}{y_0^k}\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^k = -\frac{1}{y_0^k}(-y_0^k\lambda_k + L(\lambda_k)) = \lambda_k - \frac{L(\lambda_k)}{y_0^k}. \tag{31}$$

Так как $L(\lambda_k) > 0$, то $\nu(u(\bar{y}^k)) > \lambda_k$. Принимая $\lambda_{k+1} = \nu(u(\bar{y}^k))$, повторяем операции пункта II.

Описанный процесс реализует известную схему метода Ньютона для нахождения нулей функции применительно к функции L. Действительно, из (31) имеем

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{L(\lambda_k)}{y_0^k}, \tag{32}$$

причем y_0^k, ввиду 2.4, удовлетворяет соотношению

ж) При $X = \varnothing$ под $\inf\limits_{x \in X} \mu(x)$ понимается $+\infty$.

$$L'_-(\lambda_k) \le y_0^k \le L'_+(\lambda_k).$$

Так как число участков линейности функции L конечно, то процесс заканчивается через конечное число шагов.

Замечание. Из изложенного видно, что если известно какое-либо значение λ, удовлетворяющее условию (30), то процесс решения можно начинать сразу с пункта II. Это обстоятельство может быть эффективно использовано при решении конкретных задач, когда физический смысл задачи позволяет указать такое значение λ.

В заключение этого параграфа заметим, что функцию L можно исследовать и методом параметрического программирования, однако описанный метод представляется нам более экономным в смысле объема вычислений, а также более простым с точки зрения реализации на ЭВМ.

§ 3. О практической реализации метода

При дальнейшем изложении будем предполагать, что читатель знаком с алгорифмом метода последовательного улучшения, использующим аппарат обратных матриц (модифицированным алгорифмом симплекс-метода).

Не описывая подробно всего алгорифма предложенного метода, остановимся лишь на некоторых, существенных, с точки зрения автора, деталях.

Условимся в следующих обозначениях: B - базисная матрица, $h=(h_0,h_1,\dots,h_m)$ - вектор значений базисных переменных.

3.I. Прежде всего отметим, что при реализации пункта I $h_i=h_i'+\lambda h_i''$. Величины h_i' преобразуются на каждом шаге метода последовательного улучшения обычным образом, а величины h_i'', как легко видеть, просто совпадают с элементами первого столбца матрицы B^{-1}. Это обстоятельство следует иметь в виду с целью экономии оперативной памяти ЭВМ.

3.2. Решая задачу III при различных значениях параметра λ, нет необходимости всякий раз начинать с допустимого вектора $\bar{x}$ с компонентами (I8), (I9). Так как в условиях (I4)-(I6) параметр λ не фигурирует, то $\bar{y}^k$ является допустимым базисным решением задачи IV при $\lambda=\lambda_{k+1}$. Так что для решения задач III и IV при $\lambda=\lambda_{k+1}$ можно воспользоваться двойственным симплекс-методом (см. [2]). Но в целях единообразия алгорифма можно применить и метод последовательного улучшения.

Вектор $\hat{x} = (x_0^K + \Delta, x_1^K, \ldots, x_n^K, z_0^K, z_1^K, \ldots, z_m^K)$ при $\Delta = \lambda_{K+1} - \lambda_K$, как нетрудно видеть, является допустимым вектором задачи Ш при $\lambda = \lambda_{K+1}$. Однако если x_0 не является базисной переменной решения задачи Ш при $\lambda = \lambda_K$, то $\hat{x}$ не является базисным допустимым решением. Эту трудность можно сравнительно легко обойти следующим образом.

Пусть B - базисная матрица решения задачи Ш при $\lambda = \lambda_K$, h - вектор значений базисных переменных, ς - вектор коэффициентов функции (8), соответствующих базисным переменным, $\bar{b}^K = (\lambda_K, b_1, \ldots, b_m)$, $e_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&Bh = \bar{b}^K, \\
&Bh + \Delta e_0 = \bar{b}^{K+1}.
\end{aligned} \tag{33}
$$

Пусть $g = (g_0, g_1, \ldots, g_m)$ - вектор коэффициентов разложения вектора $-e_0$ по базису, т.е.

$$
Bg = -e_0. \tag{34}
$$

Умножая (34) на некоторое ε и вычитая из (33), имеем

$$
B(h - \varepsilon g) + \Delta e_0 = \bar{b}^{K+1} + \varepsilon e_0
$$

или

$$
B(h - \varepsilon g) + (\Delta - \varepsilon) e_0 = \bar{b}^{K+1}.
$$

Распорядимся выбором ε так, чтобы функция V была минимальной. Имеем

$$
\sum_{i=0}^{m} z_i = (\varsigma, h - \varepsilon g) = (\varsigma, h) - \varepsilon(\varsigma, g).
$$

Но

$$
(\varsigma, g) = -(\varsigma, B^{-1} e_0) = -y_0^K > 0,
$$

так что следует взять максимальное ε, удовлетворяющее условиям:

$$
h_i - \varepsilon g_i \geqslant 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m,
$$

$$
\varepsilon \leqslant \Delta,
$$

т.е.

$$
\varepsilon = \min \left\{ \Delta, \min_{g_i > 0} \frac{h_i}{g_i} \right\},
$$

и мы получаем базисное допустимое решение.

Легко видеть, что описанная процедура мало чем отличается от обычного ввода переменной x_0 в базис.

§ 4. Численный пример

<u>Задача I</u>. Определить вектор $x=(x_1, x_2, \ldots, x_6)$, минимизирующий форму

$$\mu(x) = -8x_1 \quad -2x_3 \quad +x_5+2x_6$$

при условиях:

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2 \ +x_3+x_4 \qquad\qquad &= 2 \ , \\ 2x_3+3x_4+x_5+2x_6 &= 7 \ , \\ -10x_1-4x_2-x_3+x_4+2x_5-2x_6 &= 5 \ , \\ x_j \geq 0 \ , \ j=1,2,\ldots,6. \end{aligned}$$

<u>Задача II</u>. Определить вектор $\bar{x}=(x_0, x_1, \ldots, x_6, z_0, \ldots, z_3)$, минимизирующий форму

$$V(\bar{x}) = z_0+z_1+z_2+z_3$$

при условиях:

$$\begin{aligned} x_0-8x_1 \quad -2x_3 \quad +x_5+2x_6-z_0 \qquad &= \lambda, \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4 \qquad\qquad +z_1 \quad &= 2, \\ 2x_3+3x_4+x_5+2x_6 \qquad +z_2 \quad &= 7, \\ -10x_1-4x_2-x_3+x_4+2x_5-2x_6 \qquad +z_3 &= 5, \\ x_j \geq 0, \ j=0,1,\ldots,6, \\ z_i \geq 0, \ i=0,1,2,3. \end{aligned}$$

Исходя из вектора $\bar{x}$ с компонентами

$$x_j = 0 \quad (j=0,1,\ldots,6), \ z_0=-\lambda, \ z_1=2, \ z_2=7, \ z_3=5,$$

после двух итераций методом последовательного улучшения получим решение задачи II для всех $\lambda \in (-\infty, -1]$. Результаты вычислений будем приводить в виде таблиц, где в столбце I стоят базисные переменные.

ξ	I	h'	B^{-1}			
1	z_0	-1	-1	-4	1	0
0	x_3	2	0	1	0	0
0	x_5	3	0	-2	1	0
1	z_3	1	0	6	-2	1
		$\bar{y}^0$	-1	1	-1	1

Таким образом, $u(\bar y^0)=(1,-1,1)$ и $\lambda_1=0$.
Вводим в базис переменную x_0 : $\varepsilon=\min\{-\lambda,-\lambda-1\}=-\lambda-1$.
Значит, переменная x_0 вводится на место переменной z_0. Осуществив необходимые преобразования, получим:

ς	I	h	B^{-1}			
0	x_0	1	1	4	-1	0
0	x_3	2	0	1	0	0
0	x_6	3	0	-2	1	0
1	z_3	1	0	5	-2	1
		$\bar y$	0	5	-2	1

Проделав еще одну итерацию по методу последовательного улучшения, получим решение задачи III при $\lambda=0$:

ς	I	h	B^{-1}			
0	x_2	1/4	1/4	1	-1/4	0
0	x_3	7/4	-1/4	0	1/4	0
0	x_6	7/2	1/2	0	1/2	0
1	z_3	3/4	-1/4	4	-7/4	1
		$\bar y^1$	-1/4	4	-7/4	1

Так что $u(\bar y^1)=(16,-7,4)$ и $\lambda_2=3$. Вводя в базис переменную x_0, получаем решение задачи III при $\lambda=3$, причем $L(3)=0$:

ς	I	h	B^{-1}			
0	x_2	1	0	5	-2	1
0	x_3	1	0	-4	2	-1
0	x_5	5	0	8	-3	2
0	x_0	0	1	-16	7	-4
		$\bar y^2$	0	0	0	0

Так что решением задачи I является вектор

$$x=(0,1,1,0,5,0).$$

Решением двойственной задачи является вектор $u(\bar y^1)$.

В заключение автор пользуется случаем, чтобы выразить свою признательность Н.Е.Кирину, беседы с которым навели автора на мысль об описанном методе. Автор благодарен также Г.Ш. Рубинштейну за ряд замечаний.

Литература

1. Л.В.Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. Изд. АН СССР, 1959.
2. С.Гасс. Линейное программирование. Физматгиз, 1961.
3. Дж.Данциг, Л.Форд, Д.Фулкерсон. Алгорифм для одновременного решения прямой и двойственной задач линейного программирования. Сборник "Линейные неравенства и смежные вопросы" стр. 275-286. Изд. ИЛ, 1959.
4. Н.Е.Кирин. Об одном численном методе в общей задаче математического программирования. Сборник "Прикладные задачи технической кибернетики", стр. 369-374. Изд. "Советское радио", 1966.

Поступила в редакцию
15. VII. 1967 г.