Оптимальное планирование, вып.10 (1968), 29–46.

УДК 51.330.115

Н.А. АСХАБОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

I. Основные уравнения

Пусть $x_i(t), i=1,\ldots,m$, есть выпуск i -го товара на производстве в момент t, а $y_j(t), z_j(t), \sigma_j(t)$ и $\pi_j(t), j=1,\ldots,n$, - соответственно предложение, спрос, рыночная цена, потребительская цена j -го товара в момент времени t.

Рассмотрим сперва однопродуктовую модель процесса обмена. Экономический смысл следующего разностного уравнения очевиден:

$$y(t+h)=y(t)+h\cdot\alpha[z(t)-y(t)],$$

откуда, переходя к пределу при $h\to 0$, имеем:

$$\frac{dy}{dt}=\alpha(z-y). \qquad (1)$$

Аналогичное разностное уравнение для процесса ценообразования можно записать в виде

$$\sigma(t+h)=\sigma(t)+h\cdot\gamma\sigma(t)[z(t)-y(t)],$$

откуда

$$\frac{d\sigma}{dt}=\gamma\sigma(z-y). \qquad (2)$$

В (1) и (2) α и γ - некоторые положительные константы.

Пусть $s(t)$ есть доход всех потребителей в момент t. Можно взять

$$s(t)=k'z(t-h)\sigma(t-h),$$

где $0 < k' \leq 1$. Если на приобретение товара расходуется величина

$$k''\cdot s(t), \quad 0 < k'' \leq 1,$$

то

$$z(t)\sigma(t) = kz(t-h)\sigma(t-h),$$

где $k = k'k''$. Аналогично,

$$z(t+h) = k\,\frac{z(t)\sigma(t)}{\sigma(t+h)}.$$

Составив разность $z(t+h) - z(t)$, разделив на h и перейдя к пределу при $h \to 0$, после упрощений придём к следующему уравнению:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2k}{1+k}\cdot\frac{z}{\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{dt}. \qquad (4)$$

Положив $\beta = \frac{2k}{1+k}\gamma$ и учитывая (2), получим

$$\frac{dz}{dt} = \beta z\,(y-z). \qquad (5)$$

Известно, что потребительская цена имеет вид (см.[I]):

$$\pi(t) = e^{\mu(t)-1}, \qquad (6)$$

где $\mu(t)$ есть мера предпочтения или степень насущности (настоятельности) товара и имеет вид:

$$\mu(t) = \frac{\sigma(t)H(t)}{k''s(t)}.$$

Здесь $H(t)$ - состояние насыщения потребности в данном предмете. Можно считать, что

$$H(t) = z(t).$$

Учитывая эти выражения, прологарифмируем (6) :

$$\ln\pi(t) = \frac{z(t)\sigma(t)}{k\sigma(t-h)z(t-h)} - 1.$$

Аналогично

$$\ln\pi(t+h) = \frac{z(t+h)\sigma(t+h)}{kz(t)\sigma(t)} - 1.$$

Разделив $\ln\pi(t+h) - \ln\pi(t)$ на h и перейдя к пределу, получим окончательно:

$$\frac{d\ln\pi(t)}{dt} = \frac{2}{k}\left[\frac{1}{z}\frac{dz}{dt} + \frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dt}\right]. \qquad (7)$$

Используя (2) и (5), имеем:

$$\frac{d\pi}{dt} = \nu\pi\,(z-y), \qquad (8)$$

где $\nu = \frac{2}{k}(\gamma - \beta)$.

Добавим к (I), (2) и (5) некоторые нелинейные функции и возьмем для однопродуктовой модели обмена следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \alpha(z-y) + G(\pi), \\ \dot{z}(t) = \beta z(y-z) + H(\sigma), \\ \dot{\sigma}(t) = \gamma\sigma(z-y) + P(z), \\ \dot{\pi}(t) = \nu\pi(z-y). \end{cases} \qquad (I)$$

Теперь составим уравнения для многопродуктовой модели экономики.

Вообще говоря, число производимых товаров не совпадает с числом потребляемых, т.е. $m \neq n$. Пусть заданы две $(m \times n)$-матрицы:

$$A = \| a_{ij} \| \text{ и } B = \| b_{ij} \|, \; i = 1, \dots, m; \; j = 1, \dots, n.$$

Элемент $a_{ij}(t)$, $a_{ij}(t) \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, матрицы A показывает, какая доля i -го товара $(i = 1, \dots, m)$, выпускаемого на производстве, предлагается на рынке в качестве j -го товара ($j = 1, \dots, m$).

Каждая производственная единица входит в число потребителей, поэтому производственные расходы составляют часть вектора спроса. Элемент $b_{ij}(t), b_{ij}(t) \geqslant 0, t \geqslant 0$, матрицы B есть затраты j -го товара (j - я компонента вектора спроса) на производство единицы i -го товара ($i = 1, \dots, m$).
Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} \sigma_j$$

есть рыночная стоимость выпуска i -го товара, а величина

$$\sum_j x_i b_{ij} \sigma_j$$

показывает стоимость затрат на производство i -го товара в количестве x_i.

Составим разностное уравнение

$$x_i(t+h) = x_i(t) + h \cdot \rho_i(t) \sum_j x_i (a_{ij} - b_{ij}) \sigma_j = x_i(t) + h \cdot a_i x_i,$$

где $\rho_i(t) \geqslant 0$ - некоторая ограниченная дифференцируемая функция, определенная при $t \geqslant 0$. Переходя к пределу при $h \to 0$, имеем

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i x_i, \quad i = 1, \dots, m. \qquad (9)$$

Пусть $\mu = m + 4n$ и $u = (x, y, z, \sigma, \pi)$, где $x=(x_1,\ldots,x_m)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$, $z=(z_1,\ldots,z_n)$,

$$\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n),\quad \pi=(\pi_1,\ldots,\pi_n).$$

Добавим к (9) некоторую функцию от u и возьмем систему дифференциальных уравнений, описывающих экономику, в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt}=a_i x_i+F_i(u), \\ \dfrac{dy_j}{dt}=\alpha_j(z_j-y_j)+G_j(u), \\ \dfrac{dz_j}{dt}=\beta_j z_j(y_j-z_j)+H_j(u), \\ \dfrac{d\sigma_j}{dt}=\gamma_j\sigma_j(z_j-y_j)+P_j(u), \\ \dfrac{d\pi_j}{dt}=\nu_j\pi_j(z_j-y_j)+Q_j(u), \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

$i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n.$

В системах (I) и (II) предполагается, что функции F, G, H, P и Q имеют ограниченные частные производные по всем аргументам до второго порядка включительно. Далее, в (II) коэффициенты $a_i, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ и ν_j являются непрерывно дифференцируемыми функциями времени t, причём смысл β_j и ν_j в системе (II) не тот, который эти коэффициенты имели в системе (I). В однопродуктовой модели мы считали, что

$$s(t)=k'\sigma(t-h)z(t-h).$$

В многопродуктовой модели будем считать, что

$$s(t)=k'\sum_j\sigma_j(t-h)z_j(t-h),$$

а при таком подходе система для многопродуктовой модели не будет иметь вид (II). Здесь мы считаем, что

$$k_j'(t)=\frac{s(t)}{z_j(t-h)\sigma_j(t-h)},$$

причем для любого $\tau\in[t-h,t+h]$ и достаточно малого h предполагаем, что

$$k_j'(\tau)\approx k_j'(t),\quad j=1,\ldots,n.$$

Тогда мы приходим к системе (II) для многопродуктовой модели.

2. Устойчивость в однопродуктовой модели

Пусть система (I) имеет единственное неотрицательное решение

$$\bar{y}=\bar{y}(t),\quad \bar{z}=\bar{z}(t),\quad \bar{\sigma}=\bar{\sigma}(t),\quad \bar{\pi}=\bar{\pi}(t), \tag{I}$$

удовлетворяющее начальным значениям $\bar{y}(0)=y_0$, $\bar{z}(0)=z_0$, $\bar{\sigma}(0)=\sigma_0$, $\bar{\pi}(0)=\pi_0$, причем $y_0>0, z_0>0, \sigma_0>0$, $\pi_0>0$.

В дальнейшем будем считать, что $\sigma_0=1$ (такая нормировка, очевидно, не влияет на общность рассмотрения).

Разложим правые части системы (I) по формуле Тейлора в окрестности точки ($y_0, z_0, \sigma_0, \pi_0$) и обычной подстановкой приведём систему (I) к виду, имеющему тривиальное решение. Окончательно система первого приближения для возмущенного движения примет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=-\alpha y+\alpha z+\varphi\pi,\\[2mm] \dfrac{dz}{dt}=\beta z_0 y+\beta(y_0-2z_0)z+\psi\sigma,\\[2mm] \dfrac{d\sigma}{dt}=-\gamma y+(\gamma+\xi)z+\gamma(z_0-y_0)\sigma,\\[2mm] \dfrac{d\pi}{dt}=-\nu\pi_0 y+\nu\pi_0 z+\nu(z_0-y_0)\pi.\end{cases}$$

Здесь

$$\varphi=\frac{dG(\pi_0)}{d\pi},\quad \psi=\frac{dH(\sigma_0)}{d\sigma},\quad \frac{dP(z_0)}{dz}.$$

Будем считать, что

$$\varphi>0,\quad \psi<0,\quad \xi>0 \tag{2}$$

(экономический смысл этого предположения очевиден).

Положим $\psi_0=|\psi|$. Вычисления приводят к следующему характеристическому уравнению системы первого приближения:

$$\lambda^4+\left[\alpha+\beta z_0+(\beta-\gamma-\nu)(z_0-y_0)\right]\lambda^3+\left[\psi_0(\xi+\gamma)+\varphi\nu\pi_0+\alpha(\beta-\gamma-\nu)(z_0-y_0)-\right.$$
$$\left.-\beta(\gamma+\nu)(1+z_0)(z_0-y_0)+\gamma\nu(z_0-y_0)^2\right]\lambda^2+\left[\alpha\psi_0\xi+(\varphi\nu\pi_0(\beta-\gamma)-\psi_0\nu(\xi+\gamma)-\right.$$
$$\left.-\alpha\beta(\gamma+\nu))(z_0-y_0)+\gamma\nu(\alpha+\beta z_0)(z_0-y_0)^2+\beta\gamma\nu(z_0-y_0)^3\right]\lambda+\varphi\psi_0\xi\nu\pi_0-$$
$$-\nu(\alpha\psi_0\xi+\beta\gamma\varphi\pi_0)(z_0-y_0)+\alpha\beta\gamma\nu(z_0-y_0)^3=0,$$

$$\lambda^4+p_1\lambda^3+p_2\lambda^2+p_3\lambda+p_4=0, \tag{3}$$

где обозначения понятны сами собой. По критерию Льенара–Шипара (см. [2]) для отрицательности вещественных частей всех корней уравнения (3) необходимо и достаточно выполнение условий:

$$p_1>0,\ p_2>0,\ p_4>0 \text{ и } D>0, \tag{4}$$

где

$$D=p_1p_2p_3-p_1^2p_4-p_3^2 .$$

Так как $\gamma \geqslant \beta$, то $\nu \geqslant 0$. Рассмотрим сначала случай, когда

$$\nu>0 \text{ ,т.е. } \gamma>\beta. \tag{5}$$

Положим $v_0=z_0-y_0$, $v=|z_0-y_0|$. Тогда

$$p_1=\alpha+\beta z_0-(\gamma+\nu-\beta)v_0 \geqslant \alpha+\beta z_0-(\gamma+\nu-\beta)v.$$

Пусть

$$\rho_1=\frac{\alpha+\beta z_0}{\gamma+\nu-\beta} .$$

Если

$$v=|z_0-y_0|<\rho_1, \tag{6}$$

то $p_1>0$.

Очевидно, далее, что

$$p_2 \geqslant \psi_0(\xi+\gamma)+\varphi\nu\pi_0-\alpha(\gamma+\nu-\beta)v-\beta(\gamma+\nu)(1+z_0)v+\gamma\nu v^2=$$

$$=a_0v^2-a_1v+a_2=\mathcal{P}(v).$$

При $v=0$ полином $\mathcal{P}$ положителен, а при $v\to\infty$ имеем $\mathcal{P}\to\infty$; следовательно, $\mathcal{P}$ либо положителен везде при $v\geqslant 0$, либо имеются корни на положительной полуоси. В случае наличия положительных корней обозначим через ρ_2 наименьший из них, в случае отсутствия таких корней пусть $\rho_2=\rho_1$. Ясно, что при

$$v=|z_0-y_0|<\rho_2 \tag{7}$$

p_2 строго положителен. Далее

$$p_3 \geqslant \alpha\psi_0\xi-[\varphi\nu\pi_0(\gamma-\beta)+\psi_0\nu(\xi+\gamma)+\beta(\gamma+\nu)(1+z_0)]v+$$

$$+\gamma\nu(\alpha+\beta z_0)v^2-\beta\gamma\nu v^3=-b_0v^3+b_1v^2-b_2v+b_3=Q(v).$$

Имеем $Q(0)>0$, $Q(v)\xrightarrow[v\to+\infty]{}-\infty$; следовательно, на положительной полуоси этот полином имеет корни. Обозначим через ρ_3 наименьший из них. Тогда $\rho_3>0$, если

$$v=|z_0-y_0|<\rho_3. \tag{8}$$

Совершенно аналогично $\rho_4>0$, если

$$v=|z_0-y_0|<\rho_4, \tag{9}$$

где ρ_4 – наименьший положительный корень полинома

$$-\alpha\beta\gamma\nu v^3-\nu(\alpha\psi_0\xi+\beta\gamma\varphi\pi_0)v+\varphi\psi_0\xi\nu\pi_0.$$

Рассмотрим выражение D как полином относительно $v_0=z_0-y_0$. Его свободный член имеет вид

$$c=\psi_0\xi(\alpha^2\gamma\psi_0+\alpha\beta\psi_0\xi z_0+\alpha\beta\gamma\psi_0 z_0-\alpha\beta\varphi\nu\pi_0 z_0-\beta^2\nu\pi_0 z_0^2).$$

Положим

$$\rho_0=\frac{\beta z_0\nu\pi_0(\alpha\varphi+\beta z_0)}{\alpha(\alpha\gamma+\beta\xi z_0+\beta\gamma z_0)}.$$

Если

$$\psi_0>\rho_0, \tag{10}$$

то $c>0$. Коэффициент при старшем члене в выражении для D (полином относительно v_0) имеет вид:

$$c_0=-\beta\gamma^2\nu^2(\gamma+\nu)<0.$$

Ясно, что

$$D\geqslant c_0v^3+\ldots+c. \tag{11}$$

Обозначив через ρ_5 наименьший положительный корень полинома в правой части неравенства (11), мы получим, что при

$$v=|z_0-y_0|<\rho_5 \tag{12}$$

$D > 0$, если только выполнено (10). Пусть

$$\rho = min\{\rho_1, \ldots, \rho_5\}.$$

Если

$$\psi_0 > \rho_0 \qquad (*)$$

и

$$|z_0 - y_0| < \rho, \qquad (**)$$

то все корни характеристического уравнения (3) имеют отрицательные вещественные части. По классической теореме А.М.Ляпунова (см. [3] стр. 62) мы имеем следующий результат.

ТЕОРЕМА I. Если $\gamma > \beta$ и выполнены условия (*) и (**), то процесс, описываемый системой (I), асимптотически устойчив.

Экономический смысл условия (**) совершенно ясен. Условие же (*) означает, что скорость изменения спроса в зависимости от рыночной цены должна быть больше определенной постоянной величины, что довольно реально, если учесть быстрое реагирование потребителя на изменение рыночной цены данного товара.

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma = \beta$, т.е. $\nu = 0$. В этом случае характеристическое уравнение системы первого приближения имеет вид:

$$\lambda^4 + (\alpha + \beta z_0)\lambda^3 + [\psi_0(\xi + \gamma) - \beta\gamma(1 + z_0)\nu_0]\lambda^2 + (\alpha\psi_0\xi - \alpha\beta\gamma\nu_0)\lambda = 0.$$

Таким образом, один корень характеристического уравнения нулевой, пусть это будет $\bar{\lambda} = 0$. Остается исследовать корни уравнения:

$$\lambda^3 + (\alpha + \beta z_0)\lambda^2 + [\psi_0(\xi + \gamma) - \beta\gamma(1 + z_0)\nu_0]\lambda + \alpha\psi_0\xi - \alpha\beta\gamma\nu_0 = 0.$$

Обозначим

$$\delta_1 = min\left\{\frac{\xi\psi_0}{\beta^2}, \frac{\psi_0(\beta + \xi)}{\beta^2(1 + z_0)}\right\}.$$

При $\nu_0 = |z_0 - y_0| < \delta_1$ все коэффициенты рассматриваемого характеристического уравнения положительны. Для отрицательности вещественных частей всех корней этого уравнения по критерию Льенара-Шипара ещё нужно выполнение условия:

$$D_1 = p_1 p_2 - p_3^2 > 0,$$

где p_1, p_2, p_3 — коэффициенты уравнения $\lambda^3+p_1\lambda^2+p_2\lambda+p_3=0$.

$$\mathcal{D}_1=(\alpha+\beta z_0)[\psi_0(\beta+\xi)-\beta^2(1+z_0)v_0]-[\alpha\psi_0\xi-\alpha\beta^2 v_0]^2.$$

Это есть полином 2-й степени относительно v_0. Как и раньше, перейдем к полиному относительно v, положительность которого обеспечивает положительность выражения $\mathcal{D}_1$. Это будет полином со свободным членом

$$A_2=\psi_0(\alpha\beta+\beta^2+\alpha\xi+\beta\xi z_0-\alpha^2\psi_0\xi^2)=\psi_0 A_2'$$

и с коэффициентом при старшем члене:

$$A_0=-\alpha^2\beta^4.$$

Рассмотрим выражение

$$A_2'=-\alpha^2\psi_0\xi^2+(\alpha+\beta z_0)\xi+\beta(\alpha+\beta)$$

как полином относительно ξ. При $\xi=0$ $A_2'>0$, а при $\xi\to+\infty$ $A_2'\to-\infty$, значит, на положительной полуоси этот полином имеет корни. Обозначим меньший из них через δ_0. Если

$$\xi<\delta_0, \qquad (13)$$

то $A_2>0$.

Совершенно так же, как и раньше, мы приходим к выводу, что полином относительно v, который ограничивает снизу $\mathcal{D}_1$, имеет положительные корни. Обозначив наименьший из них через δ_2, имеем, что $\mathcal{D}_1>0$, если $|z_0-y_0|<\delta_2$. Пусть

$$\delta=min\{\delta_1,\delta_2\}.$$

Далее, при $v-\gamma-\beta=0$

$$\frac{d\pi}{dt}=0,$$

т.е. $\pi(t)=const$, $\pi(t)=\pi_0$ для любого $t\geqslant 0$. Таким образом, мы имеем <u>критический особенный случай</u>, который рассматривал А.М. Ляпунов (см. [3] стр.112) и который в нашем случае можно сформулировать в виде следующей

ТЕОРЕМА 2. Если $\beta=\gamma$ и выполнено условие

$$\xi < \delta_0, \quad |z_0 - y_0| < \delta, \qquad (***)$$

то невозмущенное движение (I) устойчиво. Устойчивость при этом не будет асимптотической. Однако всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, при $t \to \infty$ стремится к одному из установившихся движений, описываемых системой (I), именно:

$$\lim_t y(t) = \bar{y}(t), \quad \lim_t z(t) = \bar{z}(t),$$
$$\lim_t \sigma(t) = \bar{\sigma}(t), \quad \lim_t \pi(t) = \pi_0 + \alpha,$$

где α - некоторая определенная постоянная, зависящая от взятого возмущенного движения.

Теперь рассмотрим случай равновесия экономики, т.е.

$$z_0 = y_0, \quad \pi_0 = \sigma_0 = 1.$$

Здесь характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^4 + (\alpha + \beta z_0)\lambda^3 + [\psi_0(\gamma + \xi) + \varphi\nu]\lambda^2 + \alpha\psi_0\xi\lambda + \varphi\psi_0\xi\nu = 0.$$

В случае, когда $\nu > 0$, все коэффициенты характеристического уравнения положительны. Если обозначить

$$\bar{\rho}_0 = \frac{\beta z_0 \nu(\alpha\varphi + \beta z_0)}{\alpha(\alpha\gamma + \beta\xi z_0 + \beta\gamma z_0)}$$

и принять условие $\psi_0 > \bar{\rho}_0$, то свободный член выражения D положителен, а так как в случае $z_0 = y_0$ D не будет содержать членов с ν_0, то D и состоит из этого свободного члена.

ТЕОРЕМА 3. Если $z_0 = y_0$, $\pi_0 = \sigma_0$, $\nu > 0$ и выполнено условие

$$\psi_0 > \bar{\rho}_0,$$

то процесс, описываемый системой (I), асимптотически устойчив.

Пусть теперь $\nu = 0$, т.е. $\beta = \gamma$. Тогда характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda[\lambda^3 + (\alpha + \beta z_0)\lambda^2 + \psi_0(\beta + \xi)\lambda + \alpha\psi_0\xi] = 0.$$

Здесь

$$D_1 = \varphi_0 \left[-\alpha^2 \varphi_0 \xi^2 + (\alpha + \beta z_0)\xi + \beta(\alpha + \beta z_0)\right] = \varphi_0 B_0 .$$

Очевидно, полином B_0 относительно ξ имеет положительный корень $\bar{\delta}$. Тогда если $\xi < \bar{\delta}$, то $D_1 > 0$. Мы имеем аналог теоремы 2:

ТЕОРЕМА 4. Если $z_0 = y_0$, $\pi_0 = \sigma_0$, $\nu = 0$ и выполнено условие $\xi < \bar{\delta}$, то процесс (1) устойчив, но не асимптотически. Однако всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, при $t \to \infty$ стремится к одному из установившихся движений, описываемых системой (I).

3. Устойчивость в многопродуктовой модели экономики

Компоненты вектора $u = (u_1, \ldots, u_\mu)$ будем обозначать через u_k, $k = 1, \ldots, \mu$, где $\mu = m + 4n$. Пусть все функции

$$a_i(t),\ \alpha_j(t) \geq 0,\ \beta_j(t) \geq 0,\ \gamma_j(t) \geq 0,\ \nu_j(t) \geq 0$$

ограничены и дифференцируемы при $t \geq 0$. Далее предположим, что функции F, G, H, P и Q имеют ограниченные частные производные до 2-го порядка включительно. Пусть выполнено условие

$$\sup_{t \geq 0} \left| a_i'(t) e^{\lambda_i t} \right| < \infty,\ i = 1, \ldots, m. \qquad (I4)$$

Пусть условие (I4) выполнено для производных всех функций α_j, β_j, γ_j и ν_j, $j = 1, \ldots, n$. Пусть правые части системы (II) заданы в области Δ:

$$\Delta = \{u : 0 \leq u_k \leq R_k,\ k = 1, \ldots, \mu\}.$$

Пусть, далее, система (II) имеет единственное решение

$$\bar{u} = \bar{u}(t),$$

удовлетворяющее начальному условию $\bar{u}(0) = u^0$ и всем требованиям определения равновесия экономики, в частности,

$$z^0 = y^0,\ \pi^0 = \sigma^0.$$

В состоянии равновесия правые части системы (II) должны быть равны нулю, поэтому предположим, что в точке $\bar{u}$ все функции F, G, H, P и Q обращаются в нуль. Таким образом, мы имеем стационарное решение:

$$\bar{u} = \bar{u}(t) = u^0,$$

устойчивость которого и будем исследовать. В [7] доказано, что в состоянии равновесия матрицы A и B совпадают, откуда следует, что при $u = \bar{u}$ правые части уравнений для производственного процесса (т.е. первые m уравнений системы (II)) обращаются в нуль.

Разложим правые части системы (II) по формуле Тейлора в окрестности точки u^0, выделим линейную часть и возьмем остаточный член 2-го порядка. Далее, обычной подстановкой $v = u - u^0$ приведем систему к виду, имеющему тривиальное решение. Получим

$$\frac{dv}{dt} = L(t)v + \varphi(v), \tag{15}$$

где $L = \| \ell_{ks} \|, k, s = 1, \ldots, \mu$, есть μ -квадратная матрица, а $\varphi(v)$ – некоторая квадратичная форма относительно v с ограниченными коэффициентами. Выпишем еще уравнение I-го приближения:

$$\frac{dv}{dt} = Lv. \tag{16}$$

Пусть для всех $k = 1, \ldots, \mu$

$$\ell_{kk} < 0 \quad \text{и} \quad |\ell_{kk}| > \sum_{s \neq k} |\ell_{ks}| \tag{17}$$

и пусть для всех $s = 1, \ldots, \mu$

$$|\ell_{ss}| \geqslant \sum_{k \neq s} |\ell_{ks}| \,. \tag{18}$$

Первое неравенство в (17) можно экономически толковать следующим образом: если для некоторого решения $u(t)$ будет

$$u_k(t) - u_k^0 > 0 \qquad (\text{ или} < 0),$$

то $\ell_{kk} \cdot v_k < 0$ (соответственно, > 0), т.е. если, например, производство некоторого товара становится больше, чем в состоянии равновесия, то его производство сокращается. Второе неравенство в (17) означает, что данный ингредиент экономики (например, спрос на некоторый товар) оказывает доминирующее влияние на своё изменение.

Условие (18) можно интерпретировать так: любой ингредиент экономики больше влияет на свою динамику, чем на динамику всех остальных ингредиентов, вместе взятых.

Мы существенно будем опираться на следующую теорему А.М. Ляпунова (см. [3] стр. 370).

ТЕОРЕМА А.М. ЛЯПУНОВА. Пусть система (16) правильная и все её характеристичные числа положительны, а также

$$|\varphi_k(v)| < \mathcal{K}\, \|v\|^{\rho}, \; k=1,\ldots,\mu, \tag{19}$$

где $\mathcal{K}$ и ρ - некоторые постоянные числа, причём $\rho > 1$. Тогда процесс, описываемый системой (11), асимптотически устойчив.

Норма в (19) безразлично какая, так как в конечномерных пространствах все нормы

$$\sqrt{(v,v)} \;, \; \max_k |v_k| \;, \; \sum_k |v_k|$$

эквивалентны.

Не вдаваясь в подробности определения правильности системы (16) мы будем пользоваться следующим критерием (см.[3] стр. 338) : для того чтобы система (16) была правильной, необходимо и достаточно, чтобы все функции

$$\frac{1}{t}\int_0^t \ell_{kk}(t)dt, \; k=1,\ldots,\mu, \tag{20}$$

сходились к определенным пределам при $t \to \infty$.

Далее, характеристичным числом произвольной функции $f(t)$ называется величина

$$\chi(f) = -\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{1}{t}\, \ln|f(t)|\,, \tag{21}$$

а характеристичными числами линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений называются характеристичные числа нетривиальных решений ее фундаментальной нормальной системы решений.

Существование такой системы решений для произвольной системы вида (16) с непрерывными коэффициентами доказано в [4] .

ТЕОРЕМА 5. **Если выполнены условия** (I7)-(I8) **и для всех** $\alpha_i, i=1,\dots,m, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \nu_j, j=1,\dots,n$, **выполнено условие** (I4), **то процесс, описываемый системой** (II), **асимптотически устойчив.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементы ℓ_{ks} матрицы L составлены из произведений одной из функций α_i, α_j, β_j, γ_j или ν_j на постоянные числа-значения частных производных правых частей системы (II) в точке равновесия u^o. Поэтому существование определённых пределов выражений (20) будет доказано, если доказать существование определённых пределов аналогичных выражений для $\alpha_i, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ и ν_j; $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$. Мы покажем это для $\alpha_i(t)$. Действительно, из (I4) имеем, что существуют такие постоянные $M_i > 0$, что

$$|\alpha_i'(t)| \leqslant M_i e^{-\lambda_i t}.$$

По формуле конечных приращений для произвольного h имеем:

$$|\alpha_i(t+h)-\alpha_i(t)| \leqslant \sup_{0<\theta<1} |\alpha_i'(t+\theta h)| \cdot |h| \leqslant M_i \cdot |h| \cdot e^{-\lambda_i (t+\theta h)} \to 0$$

при $t \to \infty$ и $h \to 0$. Отсюда следует, что при $t \to \infty$ функция $\alpha_i(t)$ стремится к определённому пределу, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ и любого $i=1,\dots,m$ существуют такие числа N_i и $T \geqslant 0$, что при $t \geqslant T$ выполнено неравенство

$$|\alpha_i(t)-N_i| < \varepsilon .$$

Тогда для этих же t:

$$\left| \frac{1}{t}\int_0^t \alpha_i(t)dt - N_i \right| \leqslant \frac{1}{t}\int_0^t |\alpha_i(t)-N_i| < \varepsilon ,$$

т.е.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \alpha_i(t)dt = N_i .$$

Совершенно аналогично это показывается и для остальных коэффициентов. Таким образом, правильность системы (I6) установлена.

Теперь покажем, что все характеристичные числа системы (I6) положительны. Возьмем симметричную матрицу

$$M = \frac{1}{2}(L^T + L) = \left\| \frac{\ell_{ks}+\ell_{sk}}{2} \right\| = \|\varsigma_{ks}\|, \ k,s=1,\dots,\mu .$$

Известно, что (см. [5]) если λ_0 - наибольшее характеристическое число матрицы M, то наименьшее характеристическое число системы (I6) удовлетворяет соотношению:

$$\bar{\bar{\varkappa}} \geqslant \chi(\exp \int_0^t \lambda_0(t)dt),$$

где $\bar{\bar{\varkappa}}$ - наименьшее характеристичное число системы (I6). Таким образом, $\bar{\bar{\varkappa}}$ будет положительно, если положительно выражение

$$-\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln(\exp\int_0^t \lambda_0 dt) = -\overline{\lim_t} \frac{1}{t}\int_0^t \lambda_0 dt,$$

или $\bar{\bar{\varkappa}} > 0$, если $\lambda_0 < 0$. Мы покажем, что $\lambda_0 < 0$.

В силу условий (I7),(I8), мы имеем, что для любого $k=1,\ldots,\mu$

$$|\zeta_{kk}| > \sum_{s\neq k} |\zeta_{ks}| ,$$

причем $\zeta_{kk} = \ell_{kk} < 0$. Известно, что (см.[6] стр.I24-I25) при этих условиях матрица M невырожденная и все её характеристические числа содержатся в кругах, определяемых соотношениями

$$|\lambda - \zeta_{kk}| = \sum_{s\neq k} |\zeta_{ks}|.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства видно, что все характеристические числа матрицы M отрицательные. Значит, $\bar{\bar{\varkappa}} > 0$.

Остаётся показать справедливость оценки (I9). Действительно, $\varphi(v)$ - квадратичная форма с ограниченными коэффициентами, т.е. существует такая постоянная $\mathcal{K}$, что

$$|\varphi_k(v)| < \mathcal{K} \,\|v\|^2, \quad k=1,\ldots,\mu, \quad \|v\| = \sum_k |v_k| .$$

Итак, все условия теоремы А.М.Ляпунова выполнены. Теорема 5 доказана.

4. Два примера однопродуктовой модели

I. <u>Пример однопродуктовой модели обмена с глобальной квазиустойчивостью</u>. В системе (I) положим $\beta = \gamma = 1$ и $G(\pi) = H(G) = P(z) = 0$. Тогда $\nu = 0$ и $\pi(t) = Const$, т.е. система (I) принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \alpha(z-y), \\ \dfrac{dz}{dt} = z(y-z), \\ \dfrac{d\sigma}{dt} = \sigma(z-y). \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

Пусть

$$\bar{y}(t)=y^0, \ \bar{z}(t)=z^0, \ \bar{\sigma}(t)=\sigma^0$$

есть состояние равновесия, т.е. $z^0=y^0$. Пусть правые части системы (III) определены на некотором множестве $\Delta\subset E^3$, причем внутренность Δ_0 этой области не пустая. Пусть, далее, Δ^* есть множество всех векторов равновесия для системы (III). Определим расстояние от точки $u=(y,z,\sigma)\in\Delta$ до множества Δ^* следующим образом:

$$\rho(u)=\inf_{\bar{u}\in\Delta^*}\|u-\bar{u}\|^2.$$

В терминах нашей системы квазиустойчивость определяется так: система (III) называется глобально квазиустойчивой, если для любого её решения $\tilde{u}(t)$ с начальным значением $\tilde{u}$,

$$\tilde{u}(0)=\tilde{u}^0 \ , \ \tilde{u}^0\in\Delta_0,$$

будет

$$\lim_{t\to\infty}\rho(\tilde{u}(t))=0.$$

Известно, что (см. [7] стр. 376) если область Δ ограниченная и на Δ существует функция $W(u)$,удовлетворяющая условию Липшица и такая, что

$$\frac{dW}{dt}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial W}{\partial u_i}\cdot\frac{du_i}{dt}<0 \quad \text{при } u\in\Delta\setminus\Delta^*,$$

где

$$u=(u_1,u_2,u_3)=(y,z,\sigma),$$

то система глобально квазиустойчива.

Если взять функцию

$$W(u)=\frac{1}{2}(\pi z-\sigma y)^2,$$

то

$$\frac{dW}{dt}=-(\alpha\sigma+\pi z+\sigma y)(\pi z-\sigma y)(z-y)<0,$$

при $u \in \Delta \setminus \Delta^*$, если $z > y \Rightarrow \sigma \leqslant \pi$ и $z < y \Rightarrow \sigma \geqslant \pi$, то есть если из того, что спрос на товар больше (меньше), чем его предложение, вытекает, что потребительская цена этого товара не меньше (соответственно не больше) его рыночной цены, и область Δ ограниченная, то процесс описываемый системой (III), глобально квазиустойчив.

2. Численный пример. Пусть в системе (I) $G(\pi) = \gamma(\pi - 1)$, $H(\sigma) = \nu(1-\sigma)$ и $P(z) = \nu(z-1)$. Пусть, далее, α есть темп роста экономики, равный 107 %, т.е. α = I,07. Можно считать, что $\alpha = 1+\gamma$, если γ принять за коэффициент скидки на цену товара при темпе роста $1+\gamma$, т.е. γ =0,07. Имеем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 1{,}07(z-y) + 0{,}07(\pi - 1), \\ \dfrac{dz}{dt} = \beta z(y-z) - \nu(\sigma - 1), \\ \dfrac{d\sigma}{dt} = 0{,}07\sigma(z-y) + \nu(z-1), \\ \dfrac{d\pi}{dt} = \nu\pi(z-y). \end{cases} \qquad (\text{IУ})$$

Здесь

$$\beta = \frac{2k}{1+k}\gamma, \quad \nu = \frac{2}{k}(\gamma - \beta),$$

где k есть доля дохода, предназначаемая на приобретение товара. В следующей таблице приведены значения β и ν для некоторых:

k	0,4	0,5	0,7	0,9
β	0,035	0,047	0,057	0,066
ν	0,185	0,092	0,036	0,009

Легко видеть, что система (IУ) имеет стационарное решение

$$y = z = \sigma = \pi = 1.$$

При различных значениях коэффициента k из (IУ) получаем соответствующие системы уравнений. Некоторые значения решений (с точностью до 0,0I) системы (IУ) при k =0,4 и k = 0,7 для интервала времени от 0 до I00 даны в следующей таблице:

		Значения t						Значения t					
		0	20	40	60	80	100	0	20	40	60	80	100
$k=0,4$	y	1,5	1,2	1,12	1,02	1,01	0,99	0,8	0,85	0,88	0,89	0,92	0,92
	z	1	0,97	1,02	0,97	1,01	1,00	1,5	1,44	1,40	1,22	1,17	1,12
	σ	1	1,02	1,00	0,99	1,02	0,98	1,6	1,30	1,20	1,20	1,16	1,09
	π	0,9	0,85	0,89	0,80	0,98	0,94	1,3	1,21	1,18	1,16	1,15	1,10
$k=0,7$	y	1,5	1,02	1,01	0,98	0,95	0,94	0,8	0,71	0,60	0,89	0,93	1,00
	z	1	1,03	1,01	0,98	0,95	0,95	1,5	0,79	0,56	0,90	1,02	1,00
	σ	1	1,00	1,02	1,03	1,02	0,99	1,6	1,47	1,03	1,04	1,03	1,03
	π	0,9	0,89	0,89	0,90	0,90	0,93	1,3	1,29	1,25	1,23	1,12	1,06

Из приведенных в таблице значений различных решений системы (IУ) видно, что эти решения при $t \to 100$ довольно близко подходят к состоянию равновесия.

Литература

1. В.С.Немчинов. Потребительская стоимость и потребительские оценки. В сб. "Экономико-математические методы", вып.I (1963), 180-200.
2. Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц, М., "Наука", 1966, 508-512.
3. И.Г.Малкин. Теория устойчивости движения, М., "Наука", 1966.
4. А.Д.Горбунов. Оценки характеристических показателей системы обыкновенных лин.однор. дифф. уравнений. Вестн.МГУ № 2 (1956), 7-13.
5. Н.Г.Четаев. О некоторых вопросах, относящихся к задаче об устойчивости неустановившихся движений. ПММ, 1960, т.XXIУ, вып. I, 6-19.
6. Э.Беккенбах и Р.Беллман. Неравенства, М , "Мир", 1965
7. С.Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике, М., "Мир", 1964.
8. Н.А.Асхабов. Об одной математико-экономической модели равновесия. В сб. "Оптимальное планирование", Новосибирск, вып. 9 (1967), 3-13.

Поступила в редакцию
12. IУ. 1967 г.