Оптимальное планирование, вып. I0 (1968), I5–27.

УДК 51.330.115

А.М.РУБИНОВ , К.Ш. ШАПИЕВ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ О МАГИСТРАЛИ В СИЛЬНОЙ ФОРМЕ

В настоящей заметке доказывается теорема о магистрали в сильной форме для модели производства с переменной технологией.

Описываемая ниже модель является частным случаем модели, изученной в работе [I] .

Рассмотрим n - мерное евклидово пространство X ,частично упорядоченное с помощью конуса K ,состоящего из векторов с неотрицательными компонентами. Через X^* обозначим пространство, сопряженное к X ,через K^* - конус,сопряженный к K .

Рассматриваемая модель задается с помощью последовательности выпуклых замкнутых конусов $Z_t \subset K \times K$ (t = I,2,..) таких, что

а) $(0, y) \notin Z_t$ при $y \neq 0$ $(y \in K)$; (I)

б) если $(x, y) \in Z_t$, $x' \geq x$, $0 \leq y' \leq y$,то $(x', y') \in Z_t$;(2)

в) каков бы ни был $y \in K$, найдется $x \in K$ такой, что $(x, y) \in Z_t$. (3)

В дальнейшем скалярное произведение элементов x, y , принадлежащих пространству X , будем обозначать через $[x, y]$

Пусть T - натуральное число, $x \in K$.Конечную последовательность $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ такую,что $x_1 = x$, $(x_t, x_{t+1}) \in Z_t$ $(t = 1, 2, \dots, T-1)$, будем называть (x, T) - траекторией.

Пусть $f \in K^*$. Назовем (x, T, f) - оптимальной траекторией такую (x, T) - траекторию $\{x_t\}_{t=1}^{T}$, которая максимизирует $[f, x_T]$ среди всех возможных (x, T) - траекторий.

Рассмотрим тройку последовательностей $\sigma = \{\bar{x}, \bar{\varphi}, \alpha\}$, где $\bar{x} = \{\bar{x}_t\}_{t=1}^{\infty}$, $\bar{x}_1 \in K$, $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}) \in Z_t$; $\bar{\varphi} = \{\bar{f}_t\}_{t=1}^{\infty}$,

$\|\bar{f}_t\| = 1$, $t = 1, 2, \ldots$; $\alpha = \{\alpha_t\}_{t=1}^{\infty}$,

α_t - вещественное число, $0 < \alpha_t < \infty$, $t = 1, 2, \ldots$ Тройку σ назовем строго равновесной системой, если

$$[\bar{f}_1, \bar{x}_1] > 0 \; ; \tag{4}$$

$$[\bar{f}_{t+1}, y] < \alpha_t [\bar{f}_t, x] \quad ((x,y) \in Z_t, \; x \neq \lambda \bar{x}_t, \; \lambda > 0, \; t = 1, 2, \ldots); \tag{5}$$

$$[\bar{f}_{t+1}, \bar{x}_{t+1}] = \alpha_t [\bar{f}_t, \bar{x}_t] \quad (t = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

Для $x, x' \in K$, положим

$$\rho(x, x') = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{x'}{\|x'\|} \right\| .$$

В [2] доказана следующая

ЛЕММА I. Если σ - строго равновесная система, то при $t = 1, 2, \ldots$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_t(\varepsilon) \in (0, 1)$ такое, что для любой пары $(x, y) \in Z_t$, для которой $\rho(x_t, \bar{x}_t) \geq \varepsilon$, выполняется

$$[\bar{f}_{t+1}, y] \leq \alpha_t (1 - \delta_t(\varepsilon)) [\bar{f}_t, x] . \tag{7}$$

В [2] доказана также следующая

ТЕОРЕМА I (о магистрали в слабой форме). Пусть выполнены следующие условия:

I) $\sigma = \{\bar{x}, \bar{\varphi}, \alpha\}$ - строго равно -

весная система такая, что

$$\delta(\varepsilon) = \inf_t \tilde{\delta}_t(\varepsilon) > 0 \qquad (8)$$

(здесь $\tilde{\delta}_t(\varepsilon)$ - супремум множества всех чисел $\delta_t(\varepsilon)$, удовлетворяющих условию (7));

2) вектор $x \in K$ таков, что для некоторого натурального τ и некоторого $\lambda > 0$ существует траектория

$$x_1 = x,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_{\tau-1},\ \lambda \bar{x}_\tau .$$

Пусть, далее, $k' \geq k'' > 0$ - произвольные числа. Тогда, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$, натуральное число $T > \tau$, элемент $f \in K^*$ такой, что

$$k'' \bar{f}_T \leq f \leq k' \bar{f}_T ,$$

и (x, T, f) - оптимальная траектория $\{x_t\}_{t=1}^{T}$, число периодов, для которых выполняется $\rho(x_t, \bar{x}_t) \geq \varepsilon$, не превышает некоторого числа M, не зависящего от T.

Теорема I является обобщением известной теоремы Раднера [3] на рассматриваемую нами модель. Покажем, что в этой модели справедливо и обобщение теоремы Никайдо [4] о магистрали в сильной форме.

Заметим, что при доказательстве приведенных ниже лемм и теоремы мы используем подход, предложенный Никайдо; однако в этой заметке теорема о магистрали устанавливается в существенно более общей, чем в работе [4], ситуации.

Условимся в дальнейшем i - ю координату вектора $x \in X$ обозначать через $\{x\}^i$.

Предположим, что строго равновесная система $\sigma = \{\bar{x}, \bar{\varphi}, \alpha\}$ (где $\bar{x} = \{\bar{x}_t\}_{t=1}^{\infty}$, $\bar{\varphi} = \{\bar{f}_t\}_{t=1}^{\infty}$, $\alpha = \{\alpha_t\}_{t=1}^{\infty}$), которую мы будем рассматривать, обладает следующими свойствами:

а) $$\inf_t \min_{i \leq n} \frac{\{\bar{x}_t\}^i}{\|\bar{x}_t\|} = c > 0 \ ; \qquad (9)$$

б) $$\inf_t \min_{i \leq n} \{\bar{f}_t\}^i = m > 0 . \qquad (10)$$

Заметим, что из предположений (3),(5),(6),(9) следует, соотношение

$$\min_{i \le n} \{\bar f_t\}^i = m_t > 0 . \qquad \text{(II)}$$

Действительно, если (II) неверно, то найдется вектор $x \in K$, $x \ne 0$ такой, что

$$[\bar f_t, x] = 0 . \qquad \text{(I2)}$$

Из (3) следует, что найдется $y \in K$, обладающий тем свойством, что $(x, y) \in Z_t$, а тогда, в силу (5) и (6), найдется $\lambda > 0$ такое, что $x = \lambda \bar x_t$, $y = \lambda \bar x_{t+1}$.
Из равенства (I2) теперь вытекает, что $[\bar f_t, \bar x_t] = 0$, а это противоречит соотношению (9). Таким образом, неравенство (II) выполняется независимо от соотношения (I0); это соотношение утверждает лишь, что $\inf_t m_t > 0$

Пусть $x \in X$. Через $e(x)$ обозначим проекцию x на ортогональное дополнение к прямой, порожденной вектором $\bar x_t$. Точнее говоря, справедлива следующая формула

$$x = \frac{[\bar x_t, x]}{\|\bar x_t\|^2} \bar x_t + e(x) . \qquad \text{(I3)}$$

Ясно, что $\left[e(x), \frac{\bar x_t}{\|\bar x_t\|}\right] = 0$.

Заметим, что справедлива следующая простая лемма [4].

ЛЕММА 2. Если $x \ne 0$ $(x \in X)$ и $\rho(x, \bar x_t) < \delta$, то $\|e(x)\| < \delta \|x\|$.

Доказательство теоремы о магистрали в сильной форме существенно опирается на следующие леммы.

ЛЕММА 3. Пусть $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ - некоторая (x, T) - траектория, $\varepsilon > 0$ и натуральное число τ таково, что $\rho(x_\tau, \bar x_\tau) < \varepsilon$ Тогда

$$\frac{\|e(x_\tau)\|}{[\bar f_\tau, \bar x_\tau]} < \frac{\varepsilon [\bar f_1, x_1]}{m [\bar f_1, \bar x_1]} ,$$

где m определено по формуле (I0).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим норму вектора x_τ. Используя соотношение (5), получаем

$$[\bar f_\tau, x_\tau] = [\bar f_1, x_1] \prod_{t=1}^{\tau-1} \alpha_t .$$

Так как в силу (6)

$$\prod_{t=1}^{\tau-1} \alpha_t = \frac{[\bar f_2, \bar x_2]}{[\bar f_1, \bar x_1]} \cdots \frac{[\bar f_\tau, \bar x_\tau]}{[\bar f_{\tau-1}, \bar x_{\tau-1}]} = \frac{[\bar f_\tau, \bar x_\tau]}{[\bar f_1, \bar x_1]} ,$$

то

$$[\bar f_\tau, x_\tau] = \frac{[\bar f_\tau, \bar x_\tau]}{[\bar f_1, \bar x_1]} [\bar f_1, x_1] .$$

Используя теперь формулу (10), имеем

$$m \| x_\tau \| \leq m \sum_{i=1}^{n} \{x_\tau\}^i \leq \sum_{i=1}^{n} \{\bar f_\tau\}^i \{x_\tau\}^i = [\bar f_\tau, x_\tau],$$

откуда

$$\| x_\tau \| \leq \frac{1}{m} [\bar f_\tau, x_\tau] = \frac{1}{m} \frac{[\bar f_\tau, \bar x_\tau]}{[\bar f_1, \bar x_1]} [\bar f_1, x_1] .$$

Из приведенного неравенства и неравенства

$$\| e(x_\tau) \| \leq \epsilon \| x_\tau \| ,$$

справедливого в силу леммы 2, вытекает , что

$$\frac{\| e(x_\tau) \|}{[\bar f_\tau, \bar x_\tau]} \leq \frac{\epsilon [\bar f_1, x_1]}{m [\bar f_1, \bar x_1]} ,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 4. Пусть $x \in K$, $f \in K^*$ и $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ - (x, T, f)-оптимальная траектория, причем $[f, x_T] > 0$. Тогда, если номера τ и ν ($\tau \leq \nu \leq T$) таковы, что

$$\frac{\| e(x_\tau) \|}{[\bar f_\tau , \bar x_\tau]} < \eta , \quad \frac{\| e(x_\nu) \|}{[\bar f_\nu , \bar x_\nu]} < \eta , \qquad (14)$$

т о

$$\frac{[\bar x_\tau , x_\tau]}{\| \bar x_\tau \|^2} - \frac{[\bar x_\nu , x_\nu]}{\| \bar x_\nu \|^2} < \frac{2\eta}{c} ,$$

где c определено по формуле (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\omega = \frac{[\bar x_\tau , x_\tau]}{\| \bar x_\tau \|^2} - \frac{[\bar x_\nu , x_\nu]}{\| \bar x_\nu \|^2}$$

и допустим,что лемма неверна, т.е.

$$\omega \geq \frac{2\eta}{c} = \sup_t \max_{i \leq n} \frac{2\eta \| \bar x_t \|}{\{ \bar x_t \}^i} .$$

Положим

$$\bar w_\tau = \frac{1}{2} \left(\frac{[\bar x_\tau , x_\tau]}{\| \bar x_\tau \|^2} + \frac{[\bar x_\nu , x_\nu]}{\| \bar x_\nu \|^2} \right) \bar x_\tau ;$$

$$\bar w_\nu = \frac{1}{2} \left(\frac{[\bar x_\tau , x_\tau]}{\| \bar x_\tau \|^2} + \frac{[\bar x_\nu , x_\nu]}{\| \bar x_\nu \|^2} \right) \bar x_\nu .$$

Используя определение ω , получаем

$$\frac{\omega}{2} \frac{\{ \bar x_\tau \}^i}{\| \bar x_\tau \|} \geq \eta > \frac{\| e(x_\tau) \|}{[\bar f_\tau , \bar x_\tau]} \geq \frac{-\{ e(\bar x_\tau) \}^i}{[\bar f_\tau , \bar x_\tau]} ,$$

и потому

$$\frac{\omega}{2}\,\frac{\bar{x}_\tau}{\|\bar{x}_\tau\|} \geq -\frac{e(x_\tau)}{[\bar{f}_\tau, \bar{x}_\tau]} ,$$

откуда,используя (I3) и то обстоятельство,что $\|\bar{f}_\tau\| = 1$, получаем

$$x_\tau = \frac{[\bar{x}_\tau, x_\tau]}{\|\bar{x}_\tau\|^2}\bar{x}_\tau + e(x_\tau) \geq \frac{[\bar{x}_\tau, x_\tau]}{\|\bar{x}_\tau\|^2}\bar{x}_\tau - \frac{\omega}{2}\frac{[\bar{f}_\tau, \bar{x}_\tau]}{\|\bar{x}_\tau\|}\bar{x}_\tau \geq$$

$$\geq \left(\frac{[\bar{x}_\tau, x_\tau]}{\|\bar{x}_\tau\|^2} - \frac{\omega}{2}\right)\bar{x}_\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{[\bar{x}_\tau, x_\tau]}{\|\bar{x}_\tau\|^2} + \frac{[\bar{x}_\nu, x_\nu]}{\|\bar{x}_\nu\|^2}\right)\bar{x}_\tau = \bar{w}_\tau .$$

Таким же образом имеем

$$\frac{\omega}{2}\,\frac{\{\bar{x}_\nu\}^i}{\|\bar{x}_\nu\|} \geq \eta \geq \frac{\|e(x_\nu)\|}{[\bar{f}_\nu, \bar{x}_\nu]} \geq \frac{\{e(\bar{x}_\nu)\}^i}{[\bar{f}_\nu, \bar{x}_\nu]} ,$$

откуда

$$x_\nu - \frac{[\bar{x}_\nu, x_\nu]}{\|\bar{x}_\nu\|^2}\bar{x}_\nu + e(x_\nu) \leq \frac{[\bar{x}_\nu, x_\nu]}{\|\bar{x}_\nu\|^2}\bar{x}_\nu +$$

$$+ \frac{\omega}{2}\,\frac{[\bar{f}_\nu, \bar{x}_\nu]}{\|\bar{x}_\nu\|}\bar{x}_\nu \leq \left(\frac{[\bar{x}_\nu, x_\nu]}{\|\bar{x}_\nu\|^2} + \frac{\omega}{2}\right)\bar{x}_\nu = \bar{w}_\nu .$$

Так как $(x_{\tau-1}, x_\tau) \in Z_{\tau-1}$ и $\bar{w}_\tau \leq x_\tau$, то,в силу предположения (3), пара $(x_{\tau-1}, \bar{w}_\tau)$ принадлежит конусу $Z_{\tau-1}$.
Положим

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{[\bar{x}_\tau, x_\tau]}{\|\bar{x}_\tau\|^2} + \frac{[\bar{x}_\nu, x_\nu]}{\|\bar{x}_\nu\|^2}\right) .$$

Так как $(\bar{x}_\tau, \bar{x}_{\tau+1}) \in Z_{\tau+1}$,то и $(\lambda\bar{x}_\tau, \lambda\bar{x}_{\tau+1}) = (\bar{w}_\tau, \lambda\bar{x}_{\tau+1}) \in Z_\tau$.
Рассуждая таким же образом,получаем

$$(\lambda\bar{x}_{\tau+1}, \lambda\bar{x}_{\tau+2}) \in Z_{\tau+1}, \ldots, (\lambda\bar{x}_{\nu-1}, \lambda\bar{x}_\nu) = (\lambda\bar{x}_{\nu-1}, \bar{w}_\nu) \in Z_{\nu-1} .$$

Так как $x_\nu < \bar{w}_\nu$, то и $(\lambda \bar{x}_{\nu-1}, x_\nu) \in Z_{\nu-1}$. Более того, поскольку $\{x_\nu\}^i < \{\bar{w}_\nu\}^i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, то найдется $\mu > 0$ такое, что $x_\nu + \mu x_\nu < \bar{w}_\nu$, и потому $(\lambda \bar{x}_{\nu-1}, (1+\mu) x_\nu) \in Z_{\nu-1}$.

Так как $(x_\nu, x_{\nu+1}) \in Z_\nu$, то и $((1+\mu)x_\nu, (1+\mu)x_{\nu+1}) \in Z_\nu$. Таким же образом получим

$$((1+\mu)x_{\nu+1}, (1+\mu)x_{\nu+2}) \in Z_{\nu+1}, \ldots, ((1+\mu)x_{T-1}, (1+\mu)x_T) \in Z_{T-1}.$$

Из приведенных рассуждений следует, что последовательность

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\tau-1},\ \lambda \bar{x}_\tau,\ \lambda \bar{x}_{\tau+1},\ \ldots,\ \lambda \bar{x}_{\nu-1},$$

$$(1+\mu) x_\nu,\ (1+\mu) x_{\nu+1},\ \ldots,\ (1+\mu) x_T$$

является (x, T) - траекторией. Так как $[f, x_T] > 0$, то

$$[f, (1+\mu) x_T] = (1+\mu)[f, x_T] > [f, x_T].$$

Последнее соотношение, однако, противоречит тому обстоятельству, что траектория $\{x_t\}_{t=1}^T$ является (x, T, f) -опти - мальной. Полученное противоречие и доказывает лемму.

ЛЕММА 5. Пусть выполнены все условия леммы 4. Тогда, каково бы ни было натуральное число θ такое, что $\tau \le \theta \le \nu-1$, выполняется неравенство

$$0 \le \frac{[\bar{f}_\theta, x_\theta]}{[\bar{f}_\theta, \bar{x}_\theta]} - \frac{[\bar{f}_{\theta+1}, x_{\theta+1}]}{[\bar{f}_{\theta+1}, \bar{x}_{\theta+1}]} \le \gamma \frac{2(c+1)}{c}. \qquad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть t - произвольный номер. В силу условий (5) и (6) выполняются соотношения:

$$\frac{[\bar{f}_{t+1}, x_{t+1}]}{[\bar{f}_t, x_t]} \le \alpha_t = \frac{[\bar{f}_{t+1}, \bar{x}_{t+1}]}{[\bar{f}_t, x_t]},$$

откуда

$$\frac{[\bar f_{t+1}, x_{t+1}]}{[\bar f_{t+1}, \bar x_{t+1}]} \le \frac{[\bar f_t, x_t]}{[\bar f_t, \bar x_t]} .$$

Из этого неравенства следует,что

$$\frac{[\bar f_\nu, x_\nu]}{[\bar f_\nu, \bar x_\nu]} \le \frac{[\bar f_{\theta+1}, x_{\theta+1}]}{[\bar f_{\theta+1}, \bar x_{\theta+1}]} \le \frac{[\bar f_\theta, x_\theta]}{[\bar f_\theta, \bar x_\theta]} \le \frac{[\bar f_\tau, x_\tau]}{[\bar f_\tau, \bar x_\tau]} .$$

Таким образом,

$$0 \le \frac{[\bar f_\theta, x_\theta]}{[\bar f_\theta, \bar x_\theta]} - \frac{[\bar f_{\theta+1}, x_{\theta+1}]}{[\bar f_{\theta+1}, \bar x_{\theta+1}]} \le \frac{[\bar f_\tau, x_\tau]}{[\bar f_\tau, \bar x_\tau]} - \frac{[\bar f_\nu, x_\nu]}{[\bar f_\nu, \bar x_\nu]} . \quad (16)$$

Из (16) вытекает справедливость левой части неравенства (15), а также следует,что для доказательства правой части этого неравенства нам достаточно показать, что

$$\mathcal{J} \equiv \frac{[\bar f_\tau, x_\tau]}{[\bar f_\tau, \bar x_\tau]} - \frac{[\bar f_\nu, x_\nu]}{[\bar f_\nu, \bar x_\nu]} \le \eta \, \frac{2(c+1)}{c} . \quad (17)$$

Преобразуем левую часть (17), разложив x_τ и x_ν по формуле (13). Имеем

$$\mathcal{J} = \frac{1}{[\bar f_\tau, \bar x_\tau]} [\bar f_\tau , \frac{[\bar x_\tau, x_\tau]}{\|\bar x_\tau\|^2} \bar x_\tau + e(x_\tau)] -$$

$$- \frac{1}{[\bar f_\nu, \bar x_\nu]} [\bar f_\nu , \frac{[\bar x_\nu, x_\nu]}{\|\bar x_\nu\|^2} \bar x_\nu + e(x_\nu)] = \left(\frac{[\bar x_\tau, x_\tau]}{\|\bar x_\tau\|^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{[\bar x_\nu, x_\nu]}{\|\bar x_\nu\|^2} \right) + \left(\frac{[\bar f_\tau, e(x_\tau)]}{[\bar f_\tau, \bar x_\tau]} - \frac{[\bar f_\nu, e(x_\nu)]}{[\bar f_\nu, \bar x_\nu]} \right) .$$

Из леммы 4 следует,что первое слагаемое полученной суммы не превышает числа $2\eta/c$. Оценим второе слагаемое этой суммы, использовав условие (I4) и то обстоятельство, что $\|\bar f_\tau\| = \|\bar f_\nu\| = 1$. Имеем

$$\frac{[\bar f_\tau, e(x_\tau)]}{[\bar f_\tau, \bar x_\tau]} - \frac{[\bar f_\nu, e(x_\nu)]}{[\bar f_\nu, \bar x_\nu]} \le \left|\frac{[\bar f_\tau, e(x_\tau)]}{[\bar f_\tau, \bar x_\tau]}\right| +$$

$$+\left|\frac{[\bar f_\nu, e(x_\nu)]}{[\bar f_\nu, \bar x_\nu]}\right| \le \frac{\|e(x_\tau)\|}{[\bar f_\tau, \bar x_\tau]} + \frac{\|e(x_\nu)\|}{[\bar f_\nu, \bar x_\nu]} \le 2\eta .$$

Таким образом,

$$\mathcal{J} \le 2\eta + \frac{2\eta}{c} = \eta\,\frac{2(c+1)}{c} ,$$

что и доказывает лемму.

ЗАМЕЧАНИЕ. При доказательстве леммы мы показали, что при $t' > t$ выполняется неравенство

$$\frac{[\bar f_{t'}, x_{t'}]}{[\bar f_{t'}, \bar x_{t'}]} \le \frac{[\bar f_t, x_t]}{[\bar f_t, \bar x_t]} .$$

Докажем теперь основную теорему.

ТЕОРЕМА 2 (о магистрали в сильной форме). Пусть выполнены следующие условия:

I) $\sigma = \{\bar x, \bar\varphi, \alpha\}$ - строго равновесная система, такая, что выполнены условия (8), (9), (I0);

2) вектор $x \in K$ таков, что для некоторого натурального θ и некоторого $\lambda > 0$ существует траектория

$$x_1 = x,\ x_2, x_3, \ldots, x_{\theta-1}, \lambda\bar x_\theta .$$

Пусть, далее, $K' \ge K''$ - произвольные положительные числа.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное p, обладающее следующим свойством: каковы бы ни были номер $T > 2p$, элемент $f \in K^*$ такой, что

$$K''\bar{f}_T \leq f \leq K'\bar{f}_T ,$$

и (x, T, f) - оптимальная траектория $\{x_t\}_{t=1}^{T}$, неравенство

$$\rho(x_t, \bar{x}_t) < \varepsilon$$

справедливо для всех натуральных t таких, что $p \leq t \leq T-p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $\eta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\eta < \delta(\epsilon)\frac{K''}{K'}\frac{cm[\bar{f}_1,\bar{x}_1]}{2(c+1)[\bar{f}_1,x_1]}, \tag{18}$$

где $\delta(\epsilon)$ определено по формуле (8), c - по формуле(9), m - по формуле (10).

Так как при сделанных нами предположениях справедлива теорема I, то по данному η найдется натуральное p такое, что неравенство

$$\rho(x_t, \bar{x}_t) \geq \eta$$

выполняется не более чем при p значениях номера t. Пусть τ и ν - соответственно первый и последний номера, для которых выполняется неравенство

$$\rho(x_t, \bar{x}_t) < \eta.$$

Так как $\rho(x_\tau, \bar{x}_\tau) < \eta$ и $\rho(x_\nu, \bar{x}_\nu) < \eta$, то в силу леммы 3

$$\frac{\|e(x_\tau)\|}{[\bar f_\tau, \bar x_\tau]} < \frac{\eta[\bar f_1, x_1]}{m[\bar f_1, \bar x_1]} \quad \text{и} \quad \frac{\|e(x_\nu)\|}{[\bar f_\nu, \bar x_\nu]} < \frac{\eta[\bar f_1, x_1]}{m[\bar f_1, \bar x_1]},$$

и потому в силу леммы 5, для любого номера θ, такого, что $\tau \leq \theta \leq \nu - 1$, выполняется

$$0 \leq \frac{[\bar f_\theta, x_\theta]}{[\bar f_\theta, \bar x_\theta]} - \frac{[\bar f_{\theta+1}, x_{\theta+1}]}{[\bar f_{\theta+1}, \bar x_{\theta+1}]} \leq \eta \frac{2(c+1)[\bar f_1, x_1]}{cm[\bar f_1, \bar x_1]}. \quad (19)$$

Предположим теперь, что для некоторого θ $(\tau \leq \theta \leq \nu - 1)$ справедливо неравенство $\rho(x_\theta, \bar x_\theta) \geq \varepsilon$.
Тогда, используя лемму 2 и соотношение (8), а также учитывая, что

$$\alpha_\theta = \frac{[\bar f_{\theta+1}, \bar x_{\theta+1}]}{[\bar f_\theta, \bar x_\theta]},$$

получаем

$$\frac{[\bar f_{\theta+1}, x_{\theta+1}]}{[\bar f_{\theta+1}, \bar x_{\theta+1}]} \leq (1 - \delta(\varepsilon)) \frac{[\bar f_\theta, x_\theta]}{[\bar f_\theta, \bar x_\theta]},$$

или, что то же самое,

$$\frac{[\bar f_\theta, x_\theta]}{[\bar f_\theta, \bar x_\theta]} - \frac{[\bar f_{\theta+1}, x_{\theta+1}]}{[\bar f_{\theta+1}, \bar x_{\theta+1}]} \geq \delta(\varepsilon) \frac{[\bar f_\theta, x_\theta]}{[\bar f_\theta, \bar x_\theta]}.$$

Из предыдущего неравенства и замечания к лемме 5 ледует, что

$$\frac{[\bar f_\theta, x_\theta]}{[\bar f_\theta, \bar x_\theta]} - \frac{[\bar f_{\theta+1}, x_{\theta+1}]}{[\bar f_{\theta+1}, \bar x_{\theta+1}]} \geq \delta(\varepsilon) \frac{[\bar f_T, x_T]}{[\bar f_T, \bar x_T]}.$$

Так как рассматриваемая нами траектория – (x, T, f)-оптимальна, то $[\bar f_T, x_T] \geq [\bar f_T, \bar x_T]$, и потому

$$\frac{[\bar f_T, x_T]}{[f_T, x_T]} \geq \frac{\kappa''}{\kappa'} \frac{[f, x_T]}{[f, \bar x_T]} \geq \frac{\kappa''}{\kappa'}$$

Таким образом, имеем окончательно

$$\frac{[f_\theta, x_\theta]}{[f_\theta, \bar x_\theta]} - \frac{[\bar f_{\theta+1}, x_{\theta+1}]}{[f_{\theta+1}, \bar x_{\theta+1}]} \geq \delta(\varepsilon)\frac{\kappa''}{\kappa'} .$$

Последнее неравенство, однако, невозможно, так как оно противоречит соотношениям (18) и (19). Это означает, что наше предположение было неверно и, следовательно, при всех номерах θ $(\tau \leq \theta \leq \nu-1)$ выполняется соотношение

$$\rho(x_\theta, \bar x_\theta) \leq \varepsilon \quad . \qquad (20)$$

Из определения числа ρ следует, что $\tau \leq \rho$, $\nu \geq T-\rho$. Таким образом, неравенство (20) выполняется для любого номера θ такого, что $\rho \leq \theta \leq T-\rho$.

Теорема доказана.

Литература

1. А.М.Рубинов. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий в одной математической модели производства. Оптимальное планирование, Новосибирск, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, вып.9, 1967, 87-111.
2. К.Ш.Шапиев. Об одном обобщении теоремы о магистрали Раднера - Настоящий сборник, стр. 7-13.
3. Radner R. Paths of economic growth that are optimal with regard only to final states: A turnpike theorem, Review of economic studies, vol. XXVIII(2), N76, 1961, 98-104.
4. Nikaido H. Persistence of continual growth near the von Neumann ray: A strong version of the Radner turnpike theorem, Econometrika, 32, N1-2, 1964, 151-163.

Поступила в редакцию
21.VII.1967 г.