Оптимальное планирование, вып. 10 (1968), 7-13

УДК 51.330.115

К.И. ШАПИЕВ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ О МАГИСТРАЛИ РАДНЕРА

В настоящей **заметке** рассматривается замкнутая линейная модель производства, которая является некоторым обобщением модели, рассмотренной в работе [1].

Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_t, \ldots$ - последовательность натуральных чисел, $X_1, X_2, \ldots, X_t, \ldots$ -последовательность евклидовых пространств размерности $n_1, n_2, \ldots, n_t, \ldots$ соответственно. Обозначим через K_t конус векторов пространства X_t ($t = 1, 2, \ldots$) с неотрицательными компонентами. Будем считать, что пространство X_t частично упорядочено с помощью конуса K_t, т.е. если $x', x'' \in X_t$, то $x' \geq x''$ тогда и только тогда, когда $x' - x'' \in K_t$. Через X_t^* обозначим пространство, сопряженное к пространству X_t, через K_t^* -конус, сопряженный к конусу K_t:

$$K_t^* = \{f \in X_t \,/\, f(x) \geq 0,\ x \in K_t\} \quad (t = 1, 2, \ldots).$$

Рассматриваемая модель задается системой выпуклых замкнутых конусов $Z_t \subset K_t \times K_{t+1}$ ($t = 1, 2, \ldots$), удовлетворяющих следующим условиям:

а) Если $(0, y) \in Z_t$, то $y = 0$. (1)

б) Каков бы ни был $y \in K_{t+1}$, найдется $x \in K_t$, такой, что $(x, y) \in Z_t$. (2)

в) $(x, 0) \in Z_t$ для любого $x \in K_t$. (3)

В дальнейшем скалярное произведение в пространстве X_t ($t = 1, 2, \ldots$) будем обозначать символом $[\ ,\ ]$

Пусть T - натуральное число, элемент $x \in K_1$ (x, T)-траекторией назовем конечную последовательность $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ такую, что $x_1 = x$, $(x_t, x_{t+1}) \in Z_t$ $(t = 1, 2, \ldots, T-1)$; (x, ∞) - траекторией назовем последовательность $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ такую, что $x_1 = x$, $(x_t, x_{t+1}) \in Z_t$ $(t = 1, 2, \ldots)$. Пусть $f \in K_T^*$ (x, T, f) - оптимальной траекторией назовем такую (x, T) - траекторию $\{x_t\}_{t=1}^{T}$, которая максимизирует $[f, x_T]$ среди всех (x, T) - траекторий.

Существование (x, T, f) -оптимальной траектории для такой модели показано в работе [2] .

Тройку последовательностей $\sigma = \{\bar{x}, \bar{\varphi}, \alpha\}$, где $\bar{x} = \{\bar{x}_t\}_{t=1}^{\infty}$ - (x, ∞) - траектория при некотором $x \in K_1$; $\bar{\varphi} = \{\bar{f}_t\}_{t=1}^{\infty}$ $(\bar{f}_t \in K_t^*,\ \|\bar{f}_t\| = 1)$; $\alpha = \{\alpha_t\}_{t=1}^{\infty}$ (α_t - -вещественное число, $0 < \alpha_t < \infty$, назовем равновесной на K_1 системой, если

а) $[\bar{f}_1, \bar{x}_1] > 0$; (4)

б) $[\bar{f}_{t+1}, y] \leq \alpha_t [\bar{f}_t\ x]$ $((x,y) \in Z_t,\ t=1,2,\ldots)$; (5)

в) $[\bar{f}_{t+1}, \bar{x}_{t+1}] = \alpha_t [\bar{f}_t, \bar{x}_t]$ $(t = 1, 2, \ldots)$. (6)

Равновесную систему $\sigma = \{\bar{x}, \bar{\varphi}, \alpha\}$ назовем строго равновесной, если вместо условия (5) выполняется следующее условие:

$$[f_{t+1}, y] < \alpha_t [f_t, x] \tag{7}$$

для любого $(x, y) \in Z_t$ такого, что $x \neq \lambda \bar{x}_t$, $\lambda > 0$, $t = 1, 2, \ldots$

Если Z_t $(t = 1, 2, \ldots)$ - строго выпуклый конус, то, как следует из результатов работы [2] ,строго равновесные системы существуют.

Луч $\{\lambda \bar{x}_t\}_{\lambda > 0}$ назовем равновесным лучом в момент времени t . Очевидно, что если $\sigma = \{\bar{x}, \bar{\varphi}, \alpha\}$ -равновесная система, то и $\sigma_\lambda = \{\lambda \bar{x}_t, \bar{\varphi}, \alpha\}$ равновесна при любом $\lambda > 0$.

При сделанных предположениях справедлива следующая

ЛЕММА. Пусть $\sigma = \{\bar{x}, \bar{\varphi}, \alpha\}$ - строго равновесная система. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_t(\varepsilon) \in (0, 1)$, что для любой пары $(x, y) \in Z_t$ такой, что

$\rho(x, x_t) \geq \epsilon$ справедливо неравенство

$$[\bar{f}_{t+1}, y] = \alpha_t (1 - \delta_t(\epsilon))[\bar{f}_t, x] \qquad (t = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого конуса Z_t $(t = 1, 2, \ldots)$ рассмотрим множество

$$Z'_t \equiv \{ y / (x, y) \in Z_t, \ \|x\| = 1 \}.$$

Из замкнутости конуса Z_t и условия (I) следует, что это множество ограничено. Если бы это было не так, то существовала бы последовательность (x_k, y_k) такая, что $\|x_k\| = 1$, $\|y_k\| \longrightarrow \infty$, а тогда последовательность $(x_k/\|y_k\|, y_k/\|y_k\|)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ограничена и принадлежит конусу Z_t, следовательно, имеет предельную точку $(0, \hat{y}) \in Z_t$, $\|\hat{y}\| = 1$, что противоречит условию (I).

Перейдем теперь к доказательству леммы.

Допустим противное, и пусть существует последовательность $(x_k, y_k) \in Z_t$ такая, что $[\bar{f}_t, x_k] > 0$, $\rho(x_k, \bar{x}_t) \geq \varepsilon$ и

$$\frac{[\bar{f}_{t+1}, y_k]}{[\bar{f}_t, x_k]} \longrightarrow \alpha_t. \tag{9}$$

Не уменьшая общности, можно взять $\|x_k\| = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Следовательно, последовательность (x_k, y_k) ограничена, а тогда она имеет предельную точку $(\hat{x}, \hat{y})$. Так как последовательность $[\bar{f}_t, x_k]$ также ограничена, то из (9) следует, что $[\bar{f}_{t+1}, \hat{y}] = \alpha_t [\bar{f}_t, \hat{x}]$, а это противоречит условию леммы.

Итак, мы доказали, что для каждого конуса Z_t $(t = 1, 2, \ldots)$ выполняется неравенство

$$[\bar{f}_{t+1}, y] \leq \alpha_t (1 - \delta_t(\varepsilon))[\bar{f}_t, x] \quad \text{, где} \quad \delta_t(\varepsilon) \in (0, 1).$$

Через $\tilde{\delta}_t(\epsilon)$ обозначим супремум множества всех чисел $\delta_t(\epsilon)$, удовлетворяющих условию (8). Из леммы следует, что $\tilde{\delta}_t(\varepsilon) > 0$ при всех $t = 1, 2, \ldots$

ТЕОРЕМА. П у с т ь в ы п о л н е н о у с л о в и е л е м м ы и, к р о м е т о г о, с л е д у ю щ и е у с л о в и я :

1) начальный вектор $x \in K_1$ таков, что для некоторого натурального τ и $\lambda > 0$ существует траектория

$$x_1 = x\ ,\quad x_2\ ,\quad x_3\ ,\quad \ldots\ ,\quad x_{\tau-1}\ ,\quad \lambda \bar{x}_\tau\ ;$$

2) натуральное число $T \geq \tau$, числа $\kappa' \geq \kappa'' > 0$ и элемент $f \in K_T^*$ удовлетворяют условию $\kappa'' \bar{f}_T \leq f \leq \kappa' \bar{f}_T$;

3) $\inf\limits_t \tilde{\delta}_t(\varepsilon) = \delta(\varepsilon) > 0$.

Тогда, какова бы ни была (x, T, f) - оптимальная траектория $\{x_t\}_{t=1}^T$, число периодов, в которых $\rho(x_t, \bar{x}_t) \geq \varepsilon$, не превосходит числа

$$\frac{\ln \dfrac{\lambda \kappa'' [\bar{f}_1, \bar{x}_1]}{\kappa' [\bar{f}_1, x_1]}}{\ln (1 - \delta(\varepsilon))}\ ,$$

которое не зависит от продолжительности времени планирования T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала определим траекторию $\{\tilde{x}_t\}_{t=1}^T$ следующим образом:

$$\tilde{x}_1 = x\ ,\ \tilde{x}_2 = x_2\ , \ldots,\ \tilde{x}_{\tau-1} = x_{\tau-1}\ ,\ \tilde{x}_\tau = \lambda \bar{x}_\tau\ , \ldots,\ x_T = \lambda \bar{x}_T . \qquad (10)$$

Рассмотрим любую траекторию $\{x_t\}_{t=1}^T$ при данном $x \in K_1$. Тогда из леммы и условия 3) теоремы следует, что для любого периода t, для которого $\rho(x_t, \bar{x}_t) \geq \varepsilon$, имеет место неравенство

$$[\bar{f}_{t+1}, x_{t+1}] \leq \alpha_t (1 - \delta(\varepsilon)) [\bar{f}_t, x_t] \qquad (11)$$

С другой стороны, из определения равновесной системы следует, что для всех t по крайней мере выполняется неравенство

$$[\bar{f}_{t+1}, x_{t+1}] \leq \alpha_t [\bar{f}_t, x_t]\ . \qquad (12)$$

Допустим, что $\rho(x_t, \bar{x}_t) \geq \varepsilon$ для p периодов. Тогда из (II) и (I2) получаем

$$[\bar{f}_T, x_T] = (1-\delta(\varepsilon))^p [\bar{f}_1, x_1] \prod_{t=1}^{T-1} \alpha_t \tag{I3}$$

Следовательно, в силу условия 2) теоремы имеем

$$[f, x_T] = \kappa' [\bar{f}_T, x_T] = \kappa' (1-\delta(\varepsilon))^p [\bar{f}_1, x_1] \prod_{t=1}^{T-1} \alpha_t \tag{I4}$$

С другой стороны, в силу условия (I0), условия 2) теоремы и определения равновесной системы,

$$[f, \hat{x}_T] = [f, \lambda\bar{x}_T] \geq \kappa'' [\bar{f}_T, \lambda\bar{x}_T] = \lambda\kappa'' [\bar{f}_\tau, \bar{x}_\tau] \prod_{t=\tau}^{T-1} \alpha_t > 0. \tag{I5}$$

Теперь из (I4) и (I5) получаем, что

$$\frac{[f, x_T]}{[f, \bar{x}_T]} = \frac{\kappa'(1-\delta(\varepsilon))^p [\bar{f}_1, x_1] \prod_{t=1}^{T-1} \alpha_t}{\lambda\kappa'' [\bar{f}_\tau, \bar{x}_\tau]} = \frac{\kappa' [\bar{f}_1, x_1]}{\lambda\kappa'' [\bar{f}_1, \bar{x}_1]} (1-\delta(\varepsilon))^p$$

Для оптимальной траектории $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ очевидно $\frac{[f, x_T]}{[f, \bar{x}_T]} \geq 1$. Действительно, из соотношения $(x_{\tau-1}, \lambda\bar{x}_\tau) \in Z_{\tau-1}$ следует, что $(\lambda\bar{x}_\tau, \lambda\bar{x}_{\tau+1}) \in Z_\tau$, $(\lambda\bar{x}_{\tau+1}, \lambda\bar{x}_{\tau+2}) \in Z_{\tau+1}$, ..., $(\lambda\bar{x}_{T-1}, \lambda\bar{x}_T) \in Z_{T-1}$, откуда, учитывая (I0) и оптимальность траектории $\{x_t\}_{t=1}^{T}$, имеем $[f, \bar{x}_T] \leq [f, x_T]$. Следовательно, $\kappa' [\bar{f}_1, x_1] (1-\delta(\varepsilon))^p / \lambda\kappa'' [\bar{f}_1, \bar{x}_1] \geq 1$, откуда следует утверждение теоремы.

Теперь приведем одно достаточное условие того, чтобы равновесная система была строго равновесной.

Телесный конус C в евклидовом пространстве X назовем строго выпуклым, если для любых $c_1, c_2 \in C$ (c_1 не пропорционально c_2) таких, что либо c_1, либо c_2 – внутренняя точка C, элемент $\frac{1}{2}(c_1 + c_2)$ является внутренней точкой конуса C.

Раднер [I] вводит несколько более жестокое определе –

ние строго выпуклого конуса (он не требует,чтобы одна из точек c_1 и c_2 была внутренней точкой конуса C). К сожалению,такое определение не совсем удачно,так как наиболее важные классы моделей (например, модели, в которых допускается "свободное уничтожение товаров" ,т.е. если $(x, y) \in Z_t$, $x' \geq x$, $0 \leq y' \leq y$, то и $(x', y') \in Z_t$, ему не удовлетворяют).

Рассмотрим модель,определяемую семейством строго выпуклых конусов Z_t ($t = 1, 2, \dots$). Тогда,если $\sigma = \{\bar{x}, \bar{\varphi}, \alpha\}$ - равновесная система такая, что $\bar{x}_t$ -внутренняя точка конуса K_t ,то σ строго равновесна. Чтобы убедиться в этом,допустим противное,и пусть $(x', y') \in Z_t$ $(x' \neq a\bar{x}_t, y' \neq b\bar{x}_{t+1}$ ни при каких положительных числах a и b) и $[\bar{f}_{t+1}, y'] = \alpha_t [\bar{f}_t, x']$. Кроме того,пусть $(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{2}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}) + \frac{1}{2}(x', y')$. Тогда $[\bar{f}_{t+1}; \hat{y}] = \alpha_t [\bar{f}_t, \hat{x}]$. Так как $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$- внутренняя точка конуса Z_t $(t = 1, 2, \dots)$,то в силу того, что Z_t - строго выпуклый конус , $(\hat{x}, \hat{y})$ -внутренняя точка конуса Z_t , поэтому существуют достаточно малые векторы x и y такие, что $(\hat{x}+x, \hat{y}+y) \in Z_t$ и $[\bar{f}_{t+1}, y] > \alpha_t [\bar{f}_t, x]$. Последнее неравенство означает, что $[\bar{f}_{t+1}, \hat{y}+y] > \alpha_t [\bar{f}_t, \hat{x}+x]$, а это невозможно,так как σ - равновесная система.

ЗАМЕЧАНИЕ.В случае,рассмотренном Раднером [I] , модель задается одним конусом Z для всего времени планирования. В настоящей же заметке модель определяется семейством конусов Z_t ($t = 1, 2, \dots$), каждый из которых соответствует лишь одному периоду t времени планирования. Поэтому должно быть условие, устанавливающее связь между этими конусами. Таким условием и является условие 3) теоремы.

Теперь пусть $X_1, X_2, \dots, X_t, \dots$ - последовательность бесконечномерных гильбертовых пространств , K_t $(t=1,2,\dots)$ - выпуклый замкнутый конус в X_t , не содержащий ни одной прямой.Будем считать, что X_t частично упорядочено с помощью K_t

Пусть,далее,конусы $Z_t \subset K_t \times K_{t+1}$ $(t=1,2,\dots)$,с помощью которых определяется модель,удовлетворяют условиям (I)-(3).Тогда можно рассмотреть модель,определенную этими конусами.Для этой модели так же, как и выше, можно определить оптимальные траектории и равновесные системы (мы не останавливаемся на вопросе о существовании этих объектов).

Предположим, что равновесная система $\sigma = \{\{x_t\}_{t=1}^{\infty}, \{f_t\}_{t=1}^{\infty}, \{\alpha_t\}_{t=1}^{\infty}\}$ обладает следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое,что при всех $t = 1, 2, \dots$ для любой пары

$(x, y) \in Z_t$ $(x \neq \lambda x_t, \lambda \geq 0)$, для которой $\rho(x, \bar{x}_t) = \varepsilon$ имеет место неравенство $[\bar{f}_{t+1}, y] \leq \alpha_t (1-\delta(\varepsilon))[\bar{f}_t, x]$. (иными словами, для равновесной системы σ выполняется лемма и условие 3) теоремы)..

Анализируя доказательство теоремы, нетрудно проверить, что теорема верна и для этой модели.

Литература

I. Radner R. Paths of economic growth that are optimal with regard only to final states : a turnpike theorem, Review of economic studies, XXVIII (2), N 76, 1961, 98-104.

2. А.М.Рубинов. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий в одной математической модели производства - Оптимальное планирование, вып.9, Новосибирск,1967, 87-111.

Поступила в редакцию
17.VI. 1967 г.