Оптимальное планирование, вып .10 (1968), 3-6

УДК 51.330.115

В.Л. МАКАРОВ

ОПТИМАЛЬНЫЕ И ЛОКАЛЬНО-РАВНОВЕСНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

В настоящей заметке даются определения (u,λ) - оптимальных и локально-равновесных траекторий и приводятся две теоремы, устанавливающие связь между этими определениями.

1. Рассмотрим модель $M(Z,u)$, заданную выпуклым замкнутым конусом Z и набором функций предпочтения для категорий населения $u=(u_1,u_2,\dots,u_l)$. Конус состоит из производственных процессов, имеющих вид

$$z=(-\overset{1}{\varphi},\overset{l}{0},\overset{n}{a},-\overset{l}{w},\overset{1}{\varphi'},\overset{l}{0})$$

$$z^{(k)}=(\overset{1}{0},\overset{l}{[\dots -w_k'\dots]},\overset{n}{0},\overset{l}{[\dots w_k\dots]},\overset{1}{0},\overset{l}{[\dots w_k''\dots]}),\quad k=1,\dots,l,$$

и выпуклых комбинаций. Здесь для процессов z и $z^{(k)}$ показано, как они разбиваются на подвекторы. Это разбиение на подвекторы мы зафиксируем и везде в дальнейшем будем им пользоваться. Сверху над подвекторами стоят знаки, указывающие их размерность. Обозначение $[\dots w_k\dots]$ есть вектор, у которого на k -ом месте стоит w_k, а остальные компоненты равны нулю.

Экономический смысл компонент векторов из Z следующий: первая компонента относится к производственным фондам. Следующие l компонент относятся к видам трудовых ресурсов, соответствующих категориям населения, далее n компонент характеризуют виды продукции и следующие l компонент характеризуют категории труда, последние $l+1$ компонент относятся снова к фондам и видам ресурсов труда, но уже для следующего периода времени.

В соответствии с экономическим смыслом в векторе Z подвекторы φ, φ', w неотрицательны, подвектор a может иметь компоненты любого знака. Векторы $z^{(k)}$ описывают процесс воспроизводства трудовых ресурсов категории k.

Функции u_k, $k = 1, \dots l$, определенные на неотрицательных n - мерных векторах, предполагаются неотрицательными, непрерывными, выпуклыми вверх и неограниченно возрастающими. Кроме того, $u_k(0) = 0$.

2. Допустимая траектория развития экономики во времени есть последовательность $\{(x(t), c^1(t), \dots c^l(t))\}_{t=0}^{\infty}$, удовлетворяющая условию: $(-x(t), \sum c^k(t), 0, x(t+1)) \in Z$ для всех $t \geqslant 0$. Здесь $x(t) = (\varphi(t), w(t))$.

3. Оптимальность траектории определяется в зависимости от заданной последовательности l - мерных неотрицательных векторов $\lambda = \{(\lambda_1(t), \dots \lambda_l(t))\}_{t=0}^{\infty}$.

Допустимая последовательность $\{(\bar{x}(t), \bar{c}^1(t), \dots, \bar{c}^l(t))\}_{t=0}^{\infty}$ называется (u, λ) - оптимальной, если какова бы ни была допустимая последовательност $\{(x(t), c^1(t), \dots c^l(t))\}_{t=0}^{\infty}$, исходящая из состояния $\bar{x}(0)$, и каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется момент времени t_ε такой, что

$$\sum_{\tau=0}^{t} \sum_{k=1}^{l} \lambda_k(\tau) u_k(\bar{c}^k(\tau)) + \varepsilon \geqslant \sum_{\tau=0}^{t} \sum_{k=1}^{l} \lambda_k(\tau) u_k(c^k(\tau)) \quad \text{для всех}$$

$t \geqslant t_\varepsilon$.

4. Прежде чем определить локально-равновесную траекторию, опишем ситуацию экономического равновесия для единичного момента времени.

Состояние экономической системы $\bar{x} = (\bar{\varphi}, \bar{w})$ определяет задачу экономического равновесия в смысле Эрроу-Дебре. Сформулируем эту задачу в обычных терминах модели Эрроу-Дебре, [I].

Имеется $l+1$ производитель, один владелец фондов и l владельцев трудовых ресурсов, каждый производитель владеет полностью одной компонентой вектора $\bar{x}$, $i = 1, 2, \dots l+1$. Потребителями являются те же "лица", $j = 1, 2, \dots l+1$. Множества производственных возможностей лежат в $(n+2l+1)$--мерном пространстве. Множество производственных возможностей

владельца фондов $X_1=\{x^{(1)} \mid x^{(1)}=(a,-w,\varphi',0), (-\bar{\varphi},0,a,-w,\varphi',0)\in Z\}$.
Соответственно множества производственных возможностей владельца k - ой категории трудовых ресурсов

$$X_{k+1}=\{x^{(k+1)} \mid x^{(k+1)}=(-c^k, [\dots w_k \dots], 0, [\dots \gamma_k \dots]),$$
$$(0,[\dots -\bar{w}_k \dots],0,[\dots w_k \dots],0,[\dots w_k'' \dots])\in Z,\ 0\leqslant \gamma_k \leqslant \bar{w}_k\, u_k(c^k/\bar{w}_k)\}.$$

Множества, доступные для потребления, Y_j, $(j=1,2,\dots,l+1)$ все совпадают с неотрицательным ортантом.

Функции предпочтения потребителей таковы:

$$f_j(y^{(j)})=y^{(j)} e^{(n+l+j)},$$

где $e^{(n+l+j)}$ - орт, соответствующий $(n+l+j)$ - ой координатной оси.

Матрицу распределения прибылей обозначим через $\|\theta_{ij}\|$, где θ_{ij} -доля прибыли производителя i, идущая потребителю j.

Состояние равновесия описанной модели конкурентного равновесия определяет вектор $\bar{x}'=(\bar{\varphi}', \bar{w}')$ и векторы потребления $\bar{c}^1, \bar{c}^2, \dots, \bar{c}^l$.

5. Пусть задана последовательность матриц распределения прибылей $\theta=\{\|\theta_{ij}(t)\|\}_{t=0}^{\infty}$. Локально-равновесной траекторией, соответствующей последовательности θ, называется последовательность $\{(\bar{\bar{x}}(t), \bar{\bar{c}}^1(t),\dots,\bar{\bar{c}}^l(t))\}_{t=0}^{\infty}$, у которой векторы $(\bar{\bar{x}}(t), \bar{\bar{c}}^1(t),\dots,\bar{\bar{c}}^l(t))$ определяются состоянием конкурентного равновесия модели Эрроу-Дебре, построенной с помощью вектора $\bar{\bar{x}}(t-1)$ и матрицы $\|\theta_{ij}(t-1)\|$.

6. Следующие далее теоремы имеют место при дополнительных предположениях, накладываемых на модель $M(Z,u)$.

Предположения.

(1) Для любого $(-\varphi,0,a,-w,\varphi',0)\in Z$, если $a_i>0$ для некоторого i, то $\sum_{k=1}^{l} w_k>0$.

(2) Существует процесс $(-\varphi,0,0,0,\varphi',0)\in Z$, такой, что $\varphi'>0$.

<u>Теорема I</u>. Для любой последовательности λ такой, что $\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{l}\lambda_k(t)u_k(c^k(t))\leqslant K$ для всех допустимых исходящих из $x(0)$ траекторий, (u,λ) - оптимальная траектория существует и найдется последовательность $\theta=\{\|\theta_{ij}(t)\|\}_{t=0}^{\infty}$

такая, что соответствующая ей локально-равновесная траектория совпадает с (u,λ) -оптимальной.

Теорема 2. Пусть последовательность $\theta = \{\|\theta_{ij}(t)\|\}_{t=0}^{\infty}$ такова, что

$$\sum_{j=1}^{l+1} \theta_{1,j}(t) \geq \varepsilon > 0$$

и

$$\sum_{i=2}^{l+1} \theta_{i,1}(t) = 0$$

для всех $t \geq 0$. Тогда найдется последовательность λ такая,что (u,λ) - оптимальная траектория будет совпадать с локально-равновесной траекторией, соответствующей последовательности θ.

Эти теоремы обобщаются на случай, когда φ есть не число, а вектор. Однако в этом случае состояние равновесия,задающее переход из состояния в состояние в локально-равновесной траектории, определяется более сложным образом.

Литература

I.С.Карлин. Математические методы в теории игр,программировании и экономике.М., 1964, гл. 8.

Поступила в редакцию
15.II.1968 г.